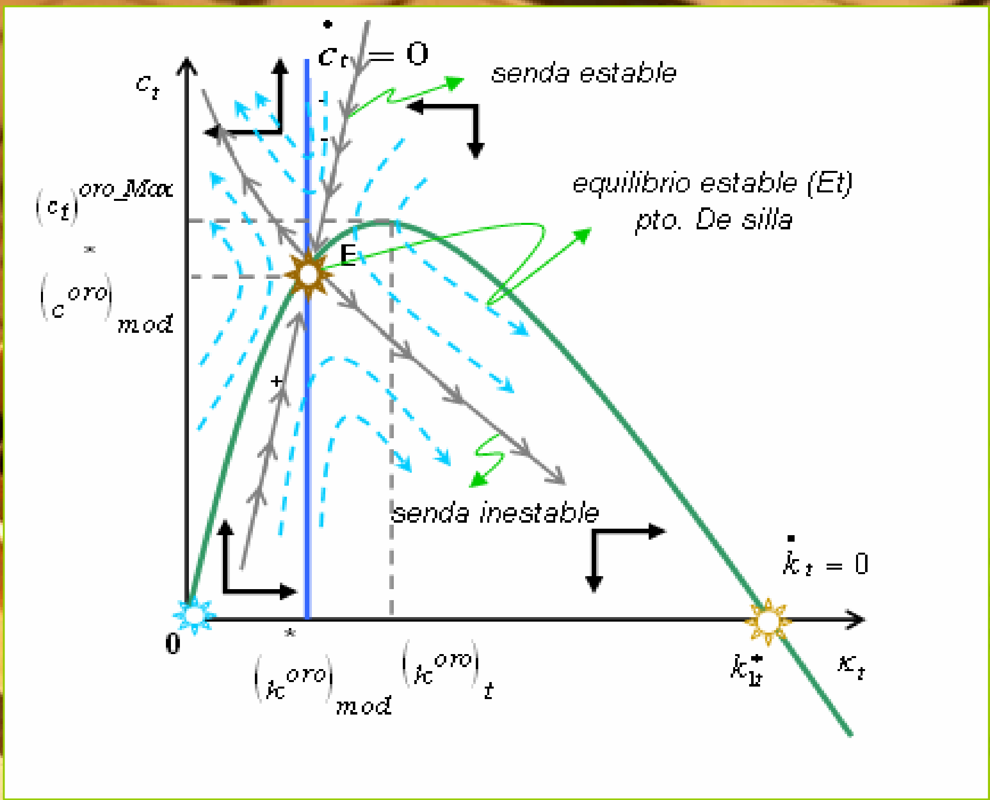
# ECONOMÍA

# CRECIMIENTO ECONÓMICO

**Versión Corregida**



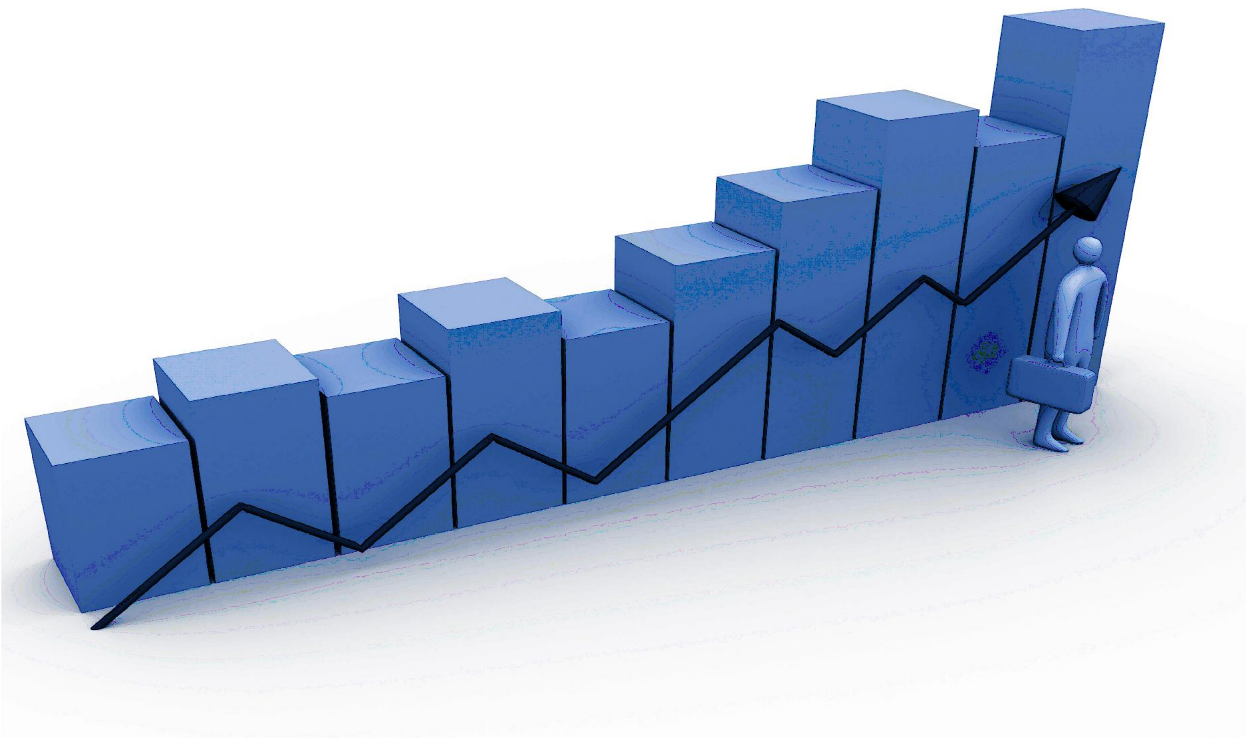

Cesar Humberto Antunez Irgoin

# CRECIMIENTO ECONÓMICO

**Ejercicios de Crecimiento Económico**

**Versión Corregida**

**Mayo del 2011**



Cesar Humberto Antunez Irgoin

**(Lima – Perú)**

*Cualquier tonto inteligente puede hacer las cosas más grandes y más complejas…Se necesita ser un genio y mucho coraje para moverse en la dirección contaría.*
***(Albert Einstein)***

# CONTENIDO

Ejercicios de Crecimiento Económico

Ejercicios de Crecimiento Económico

# PRÓLOGO

Crecimiento Económico en son apuntes de estudio, que ha sido desarrollado como material de consulta para el mejor entendimiento del lector, de manera rápida y concisa de los modelos de crecimiento. Este material tiene como finalidad introducir al lector en las técnicas de optimización dinámica aplicadas al análisis económico, y un razonamiento económico de los modelos de crecimiento. Se exponen modelos que buscan explicar los determinantes del crecimiento económico, así como las diferencias de largo plazo en los niveles de ingreso por habitante entre países con énfasis a economías emergentes.

En este texto expondremos las principales teorías, que han sido divididas por capítulos para su fácil entendimiento.

El capítulo I: Trataremos de introducir al lector de forma rápida y sencilla sobre las causas del crecimiento y las teorías del crecimiento.

Capítulo II: Hablaremos del modelo del modelo de Harrod, de Domar, el modelo básico de Solow, el modelo de Solow – Swan, el modelo de Crecimiento de Uzawa, el modelo de Kaldor, el modelo de Pasinetti y el modelo de Kalecki.

Capítulo III: Hablaremos del crecimiento con progreso tecnológico y tasa de ahorro exógena en esta parte explicaremos la técnica, tecnología, cambio técnico y progreso tecnológico. Solow con progreso tecnológico exógeno y desincorporado y el modelo de Solow – Swan con progreso tecnológico exógeno.

Capítulo IV: Veremos el crecimiento con progreso tecnológico y tasa de ahorro endógena, hablaremos, del modelo de Hicks, el modelo de aprendizaje de Arrow y la función de progreso técnico.

Capítulo V: Trata de los modelos neoclásico de crecimiento optimo, es esta parte de explica el Modelo de Ramsey -Cass-Koopmans y el modelo Neoclásico de Ramsey con progreso tecnológico.

Capítulo VI: Trata del enfoques recientes de crecimiento endógeno, hablaremos del modelo AZ, el modelo de crecimiento con sector capital Físico y Humano, con externalidad de capital, el Modelo de Lucas, con gobierno, con gasto público, el modelo de crecimiento Neoclásico con capital Humano, el modelo de crecimiento con educación de Jones y Uzawa, con acumulación de capital Humano, el Modelo de Aprendizaje y derrame de conocimiento, el modelo de Jones – Manuelli y Contabilidad de crecimiento o fuentes de crecimiento.

Capítulo: VII: Para finalizar explicaremos los modelos de crecimiento en la periferia, como el modelo de Lewis, el modelo de Solow con economía abierta y el modelo de crecimiento con factor tierra.

**Agradecimiento:**

Este libro no hubiera sido posible, sin la valiosa ayuda de las siguientes personas:

Del Economista Carlos Contreras Paz, que me impartió el curso de Crecimiento Económico en la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, gracias a lo cual empecé a escribir este libro con ayuda de sus notas de clase.

El agradecimiento a las personas que dedico este libro. Como diría el gran *Althea Gibson* "*Cualesquiera que hayan sido nuestros logros, alguien nos ayudó siempre a alcanzarlos*". A mis padres que con su enorme esfuerzo e interés en mí siempre tuvieron que dispusiera de las condiciones y medios para estudiar, que sin esta importante ayuda no hubiera sido posible la realización de este libro.

Por ultimo Quiero agradecer por la primera edición de este texto y otros al Director y Fundador del grupo de Investigaciones eumed.net Juan Carlos Martínez Coll, por la publicación del texto en la Biblioteca Virtual de Economía y ha todo los que conforman este grupo que se encuentra alojado en http://www.eumed.net/, que sin esta ayuda tal vez nunca hubiera sido publicado este texto. Y ha toda la gente de la UNMSM que con su interés en este texto hacen posible la segunda edición del mismo en espacial a Gustavo Espinoza Peralta un agradable compañero de aula.

**Cesar Humberto Antunez Irgoin**

Lima, Mayo del 2011.

# Capítulo I

## Introducción

*“El crecimiento económico es un fenómeno complejo en el que, mediante la acumulación de más y mejores factores productivos y de su utilización mediante técnicas cada vez más productivas, las economías son capaces de generar una mayor cantidad de bienes y servicios. Se trata además de un proceso dinámico que entraña un cambio continuo en la estructura sectorial. De hecho, este último podría ser considerado como uno de los hechos estilizados del crecimiento.”*

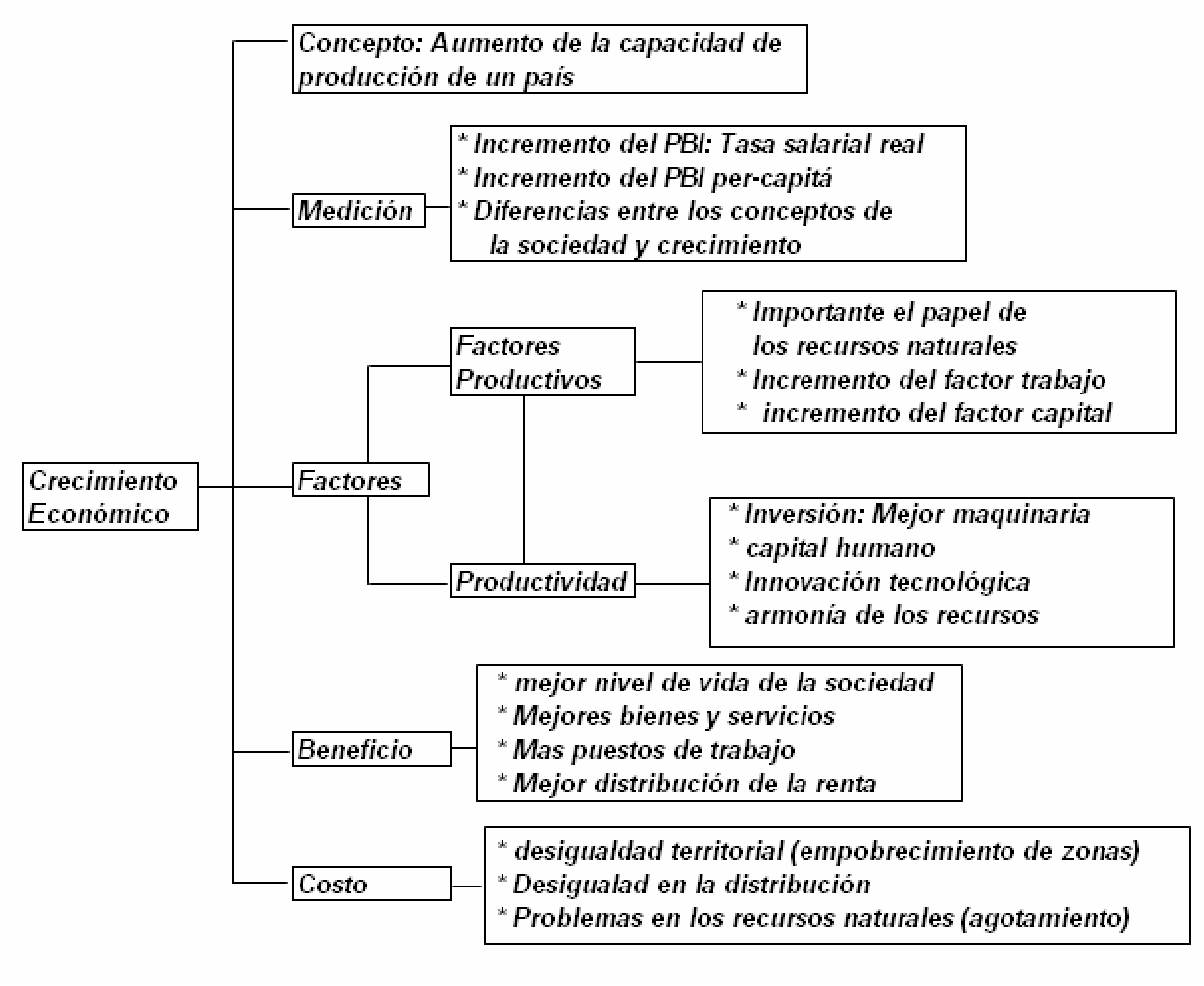
*Kuznets (1973).* Citado
Por*: Lorenzo Serrano (1998)*, Pág.:3

## 1.1 *Introducción al Crecimiento*

El crecimiento económico es importante hoy más que nunca, cuando la economía mundial atraviesa una desaceleración económica, por la crisis financiera que esta pasado EE.UU. y por las consecuencias que tiene en países desarrollados y en vías de desarrollo. Pero ¿qué es el de crecimiento? Que nos ayuda a medir el bienestar de la población de un país o región económica y del éxito de las políticas económicas. La definición de crecimiento económico se puede interpretar como el incremento porcentual del producto bruto interno de una economía en un período de tiempo.[1]

El crecimiento no es espontáneo, sino es el resultado de la combinación de los componentes del crecimiento y de la política económica que el gobierno aplica. Esto quiere decir que un nivel de crecimiento elevado mejora el bienestar de la población de un país.[2]

**Gráfica 1.1: El Crecimiento Económico**




[1] El crecimiento se calcularse en términos reales para excluir el efecto de la inflación. Crecimiento económico = (PBI t – PBI t-1) / PBI t = ΔPBI / PBI donde PBI t: Producto bruto interno en el período t, PBI t-1: Producto bruto interno en el período t-1 y ΔPBI. Variación del producto bruto interno. Donde los valores están generalmente expresados en términos pre-capital. Un ejemplo de esto es que si aumenta, si el PIB real per-cápita fue $17,000 el primer año y $21,000 el segundo, significa que la economía experimentó un crecimiento económico real per-cápita.

[2] supone que un elevado crecimiento económico es beneficioso para el bienestar de la población, ya que mejora el bienestar materiales disponibles y por ende una cierta mejora del nivel de vida. Mejora tanto en la educación, salud vivienda y alimentación y con esto mejor posibilidades de vida.

En el Gráfico [1.1] se puede observar, la importancia del crecimiento económico para la sociedad, así como sus beneficios, costo que tiene para esta sociedad y los factores que influyen en el crecimiento económico.

## 1.2 *¿Qué causa el Crecimiento Económico?*

Existen diversos factores que pueden afectar el crecimiento económico de un país. Los modelos que se presentan en este libro utilización estos factores para explicar el crecimiento económico como son: trabajo, capital, capital humano, recursos naturales, avances tecnológicos.

### Recursos naturales

Imaginemos un país que presenta mayores recursos naturales que otro país y puede producir más bienes y servicios. Supongamos que estos dos países están expresados por, "I" y "II" se sabe que presentan similitudes en casi todos sus ámbitos. Sin embargo, I posee mayores recursos naturales en su país que II. Es más probable que "I" tenga un mayor crecimiento económico que el otro país "I".

### Mano de Obra

Cuando existe más mano de obra (productiva), la producción de un país aumenta. Con lo cual no significa que a mayor trabajadores mayor producción sino lo más importante para el crecimiento económico es la productividad laboral de los trabajadores. La productividad laboral es la producción total dividida por el número de horas que se tarda en producirla bienes o servicios. Un aumento en la productividad laboral aumenta también la producción de la economía. Ello conduce a un crecimiento económico.

### Capital

Dentro de los bienes de capital se incluyen las fábricas y maquinarias. La inversión que se realiza en estos bienes de capital puede contribuir a aumentar la productividad laboral, con la cual se aumenta la producción del PIB real de la economía. Para aumentar la inversión en bienes de capital, un país debe reducir el consumo actual.

### Capital Humano

Se refiere al conocimiento y habilidades que las personas adquieren gracias a la educación, capacitación laboral y experiencia laboral. Mientras mayor sea el capital humano de las personas en un país, mayor será su crecimiento económico de este país. El crecer su economía en base a trabajadores que poseen una buena capacitación, educación y desempeño laboral, conduce al crecimiento económico.

### Avances Tecnológicos

Los avances tecnológicos permiten aumentar la producción usando la misma cantidad de recursos y esto se puede ver en estos tiempos en que la tecnología simplifica el trabajo como por ejemplo de los obreros. Estos avances tecnológicos suelen ser el resultado de nuevos bienes de capital o nuevos métodos de producción.

## 1.3 *Teorías del Crecimiento Económico*

Son muchos las teorías económicas de crecimiento se refieren al crecimiento de la producción potencial, o nivel de producción de pleno empleo. Las teorías del crecimiento vienen desde los tiempos de Adam Smith hasta nuestros días, y han intentado explicar los fenómenos de crecimiento y desarrollo a lo largo de la historia.

Las teorías de crecimiento económico explican sus causas utilizando modelos de crecimiento económico, que son simplificaciones de la realidad. Estos modelos de crecimiento económico no se refieren a ninguna economía en particular, aunque sí pueden ser contrastados empíricamente. Como veremos a largo de este libro, las causa del crecimiento económico se deben: Que la economía crece porque los trabajadores tienen cada vez más instrumentos, para su trabajo (mas capital), que trabajadores con un mayor stock de conocimientos son más productivos (educación, incrementaría el capital humano) y que la economía crece por el proceso tecnológico, como veremos son muchos los autores que explican el crecimiento económico con estas tres variables en los modelos que plantean.

## 1.4 *Teorías del Ciclo Económico*

Los ciclos económicos han sido estudiados por más 150 años, pero no fue hasta 1940, que surgió una definición clara de los ciclos económicos, debido a los esfuerzo de un grupo conformado por: Wesley Clare Mitchell y Arthu F. Burns. Auspiciados por National Bureau of Economic Research (El Escritorio nacional de Investigación Económica) en Nueva York.

Definieron que el ciclo económico es el cambio o fluctuación que encuentra la actividad económica de las naciones.

Un ciclo consiste de expansión de hechos que ocurre al mismo tiempo en muchas actividades económicas, seguida por recesiones generales, contracción y recuperación. La actividad económica se distingue por su forma cíclica, generalmente la duración de los ciclos es variable presentando una media de unos ocho años aproximadamente. ¿Por qué es importante el ciclo? Por que nos ayuda a ver las fluctuaciones de la actividad agregada. Aunque en existen varias formas de medir la actividad económica agregada, se puede medir mediante el ingreso real.

## 1.5 *Teoría del Desarrollo Económico*

Estas buscan modificar la estructura económica, política y social. Donde el desarrollo económico se logra agilizando significativamente la producción, productividad, las oportunidades de empleo y dinamizar las exportaciones y tratar de liberarse de la dependencia de otros países desarrollados. La decisión es invertir en el sector público y en el sector privado.

# Capítulo II

## Crecimiento sin progreso tecnológico y tasa de ahorro endógena

*"Estas tres señales distinguen al hombre superior: La virtud que lo libra de la ansiedad; la sabiduría que lo libra de la duda; y el valor, que lo libra del miedo".*

*Confucio*

## 2.1 *Modelo de Harrod*

*Roy Harrod* (1939) elabora un modelo que explicar el crecimiento económico a largo plazo, de manera equilibrada (regular). Califico su teoría como el matrimonio entre “el principio de aceleración” y la “teoría del multiplicador” expresando con esto su posición keynesiana.

Por que usado el principio de *Keynes* que la inversión juega una doble función en la economía: Determina el ingreso y la demanda global, y por su característica del multiplicador que influya en la demanda y por su apariencia de oferta aumenta la capacidad de producción. De manera que la condición para un crecimiento regular y equilibrado en la economía se realiza cuando el crecimiento de la oferta es igual al crecimiento de la demanda.

*Keynes* al introducir anticipadamente que el crecimiento es la determinación de la inversión en la economía, concluye que la relación que determina la tasa de crecimiento es inestable. Inspirando en este análisis, *Harrod* demostrará años mas tarde que la inestabilidad del crecimiento económico, se puede obtención de la estabilidad y esta puede ser el fruto del azar o de intervenciones de estabilizaciones derivadas de instrumentos monetarios y presupuestarios del Estado.[3]

### 2.1.1 Supuestos del modelo

*Harrod* considerara para su modelo que:

- ✓ Sea una economía sin relacionada con el exterior
- ✓ El ahorro agregado “S” es una fracción (proporción) constante “s” del ingreso nacional (renta) “Y”. $S = s.Y$ , $0 < s < 1$
- ✓ la tasa de incremento del ingreso es un determinante importante de su demanda de ahorros.
- ✓ La fuerza de mano de obra “L” crece a una tasa constante. $L_t = L_0(1+n)^t$
- ✓ La demanda es igual a la oferta. Con esto Harrod puede distingue que las fluctuaciones en la trayectoria de crecimiento y las fluctuaciones, que en la actualidad se conoce como los ciclos de negocios, son cosas distintas, sin embargo, creía que ambos fenómenos deberían ser estudiados conjuntamente.

### Función de Producción Agregada

Según *Harrod* la sociedad tiene una función de coeficientes fijos (capital y trabajo) de *Leontief*, de esta manera satisface el principio del acelerador.

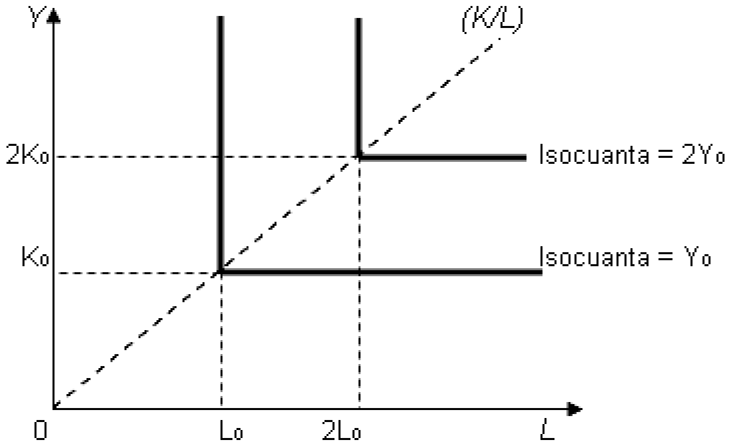
El proceso de producción de la economía hay una sustituibilidad nula de los factores de la producción, de manera que para generar una unidad de producto (output) se necesitará de “*u”* (coeficiente fijo) unidades de capital y de “*v*” (también coeficiente fijo) unidades de mano de obra.

La función de producción escribe de la siguiente forma:

[3] El artículo de Harrod que se titula “An Essay in Dynamic Theory” (Un Ensayo en la Teoría Dinámica). Publicado en The Economic Journal (El Periódico Económico), Marzo 1939.

**Gráfica 2.1: La función de producción de Harrod**

$$Y_t = Min\left\{\frac{K_t}{v}, \frac{L_t}{u}\right\}$$




Donde:

$Y_t$: Producto agregado en el periodo “t”

$K_t$: Stock de capital agregado en el periodo “t”

$L_t$: Función de trabajo (La mano de obra o producción económica activa) en el periodo “t”

$v$: Relación capital – producto

$u$: Relación trajo – producto

En la gráfica [2.1] se observamos la imposibilidad de sustituir (K, L), o mejor dicho, dados los coeficientes fijos, las isocuantas toman la forma de ángulo recto, revisten la forma de una forma de escuadras con esquinas a lo largo de la línea $[\overline{0(K/L)}]$. Esa línea es el lugar geométrico en el que la ratio K y L es $\frac{v}{u}$ , sí los inputs están plenamente empleados, el producto nacional será igual a la función de producción de Leontief. Además, hay que añadir que la unión de lo vértices de los ángulos es el único camino para aumentar o disminuir la cantidad del producto.

### 2.1.2 La regla de 72

Esta regla nos permitirá determinar el tiempo necesario para que cualquier variable necesite para duplicarse. En economía empleamos la regla del 72 para determinar el tiempo necesario para duplicar la tasa de crecimiento del producto

Se emplea dividiendo 72 entre la tasa, el resultado es el número de años necesario para el producto. Por ejemplo:

Si la tasa de crece 1% entonces se duplicara cada 72 años.
Si la tasa de crece 2% entonces se duplicara cada 36 años.
Si la tasa de crece 3% entonces se duplicara cada 24 años.
Si la tasa de crece 4% entonces se duplicara cada 18 años.
Si la tasa de crece 5% entonces se duplicara cada 14,4 años.
Si la tasa de crece 6% entonces se duplicara cada 12 años.
Si la tasa de crece 7% entonces se duplicara cada 10,28 años.
Si la tasa de crece 8% entonces se duplicara cada 9 años.

Si la tasa de crece 9% entonces se duplicara cada 8 años.
Si la tasa de crece 12% entonces se duplicara cada 6 años.

Demostración de la regla del 72

Sea *y (t)* el ingreso per - cápita en el momento *"t"* y se supone que $y_0$ se el valor inicial del ingreso per-cápita.

Entonces $y(t) = y_0.e^{gt}$ es el tiempo que necesitamos para duplicarse el ingreso per - cápita se determina por el tiempo *t*.* Cual se considera que el ingreso per - capita inicial es igual a $y(t) = 2.y_0$. Por lo tanto, si reemplazamos en la ecuación queda $2.y_0 = y_0.e^{gt}$ aplicado logaritmo neperiano y despejando t quedara expresado como[4]. $t^* = \dfrac{\ln(2)}{g}$.

Veamos algún ejemplo de esta regla con tasa de crecimiento:

$$t_1 := \frac{\ln(2)}{0.01} \qquad t_1 \rightarrow 100.0 \cdot \ln(2) = 69.315$$
$$t_2 := \frac{\ln(2)}{2\%} \qquad t_2 \rightarrow 50.0 \cdot \ln(2) = 34.657$$
$$t_3 := \frac{\ln(2)}{3\%} \qquad t_3 \rightarrow 33.333333333333333333 \cdot \ln(2) = 23.105$$
$$t_4 := \frac{\ln(2)}{4\%} \qquad t_4 \rightarrow 25.0 \cdot \ln(2) = 17.329$$
$$t_5 := \frac{\ln(2)}{5\%} \qquad t_5 \rightarrow 20.0 \cdot \ln(2) = 13.863$$
$$t_6 := \frac{\ln(2)}{6\%} \qquad t_6 \rightarrow 16.666666666666666667 \cdot \ln(2) = 11.552$$
$$t_7 := \frac{\ln(2)}{7\%} \qquad t_7 \rightarrow 14.285714285714285714 \cdot \ln(2) = 9.902$$
$$t_8 := \frac{\ln(2)}{8\%} \qquad t_8 \rightarrow 12.5 \cdot \ln(2) = 8.664$$
$$t_9 := \frac{\ln(2)}{9\%} \qquad t_9 \rightarrow 11.111111111111111111 \cdot \ln(2) = 7.702$$
$$t_{12} := \frac{\ln(2)}{0.02} \qquad t_{12} \rightarrow 50.0 \cdot \ln(2) = 34.657$$

### 2.1.3 Función de inversión

*Harrod* nos dice: Que la inversión es tipo aceleradora, estos significa que el volumen de la inversión va depender directamente de la variación del producto, dado el coeficiente de aceleración.

Partiendo de la condición de equilibrio en la que la demanda iguala a la oferta, establecemos que el ahorro iguala a la inversión (economía sin relación con el exterior). El ahorro es una fracción *s* del ingreso, mientras que la inversión es el incremento en el stock de capital. Esto que expresado por la ecuación.

[4] Para fines practico de la reglase concederá el *ln(2)* = 0.7, pero en los ejemplos anteriores se a considerado todos los decimales del *ln(2)*, queda como ejercicio para el lector, aplicar la regla practica de 0.7 que es el logaritmo neperiano a todos los ejemplos.

$$I_t = v.\Delta Y_t$$

Donde:

$v$: Coeficiente de aceleración, relación capital – producto.

$I_t$: Volumen de inversión.

$\Delta Y_t$: Variación del producto.

El crecimiento equilibrado se puede empezar por analizar por el ahorro ex-ante (deseado) y la inversión ex-ante sean iguales y después analizar de qué manera el crecimiento equilibrado requiere que se sostenga sin discontinuidad la proporción ex-ante entre el stock de capital y el ritmo de producción. El análisis ex post analiza la cantidad realizada efectiva.

### a) Análisis Ex-ante

Antes que ocurra el fenómeno de los hechos que van hacer variables planeadas.

- Partiendo de la condición de equilibrio en la que la demanda iguala a la oferta, establecemos que el ahorro iguala a la inversión. El ahorro es una fracción *s* del ingreso, mientras que la inversión es el incremento en el stock de capital.
- La inversión se iguala con el volumen de ahorro se hay, como la razón de la propensión marginal ahorra requerida, respecto a la aceleración capital – producto requerida.
- La tasa de crecimiento garantizada es aquella tasa decrecimiento del producto, que hace que los empresarios se sientan satisfechos por haber formulado un volumen.

Del equilibrio macroeconómico tenemos:

$$I = S = \Delta K \rightarrow v.\Delta Y = s.Y$$

Si rescribimos de esta forma como $Y = \frac{I}{s}$ se ve el rol del multiplicador tiene en esta teoría.

Dividiendo ambos lados de la ecuación entre el cambio en el nivel de ingreso $\Delta Y$. Obtenemos:

$$\frac{\Delta Y}{Y_r} = \frac{s_r}{v_r}$$

La ecuación puede ser reescrito como $\frac{\Delta Y}{Y_r} = \frac{s_r}{v_r} = g_W$, *la ecuación fundamental de Harrod*

Debido a que $v = \frac{\Delta Y}{\Delta K}$ es el incremento que efectivamente ocurre en el stock de capital ante

Un incremento en una unidad en el nivel de ingreso. Y constante, esta ecuación puede aproximarse con la siguiente formulación[5].

$g_W = \frac{s}{\frac{\Delta Y_r}{Y_r}}$ La tasa de crecimiento efectiva, la que en realidad ocurre

[5] Si diferenciamos e igualamos cero a *K/Y* (que es constante, entonces) tenemos $\Delta(K/Y) = \Delta(v) \Rightarrow \frac{Y\,\Delta K - K\,\Delta Y}{Y^2} = 0$, es decir. $\frac{\Delta K}{\Delta Y} = \frac{K}{Y}$

Donde:
$r$ : Subíndice requerido o planeado.
$g_w$ : Tasa de crecimiento garantizada.
$s_r$ : Propensión marginal ahorrar.
$v_r$ : Relación capital - producto requerido.

**b) Análisis *Ex-post***

Este efectúa un análisis considerando las variables después del fenómeno ocurrido, partir de la identidad.
Si la inversión *ex post* es inferior a la *ex ante* entonces habrá un estímulo para el incremento de la producción, pues habría ocurrido una reducción indeseada de stocks de producción que son insuficientes. Lo contrario ocurrirá si la inversión *ex ante* es inferior a la *ex post*.

Para *Harrod* el equilibrio dinámico es intrínsecamente inestable[6]. Dado que la trayectoria de la producción que se sigue con la $g_w$ es un movimiento en equilibrio, y ella representa que los productores han hecho las cosas tal como debían haber sido hechas. Por lo que los empresarios tendrán incentivos para seguir haciendo lo mismo.

De la identidad macroeconómica (Oferta igual a la demanda) tenemos;

$I_e = S_e \Rightarrow v_e.(\Delta Y_e) = s_e.Y_e \Rightarrow \frac{\Delta Y_e}{Y_e} = \frac{s_e}{v_e}$, entonces tenemos $g_e = \frac{s_e}{v_e}$

Donde:

$e$ : Subíndice efectivo u observado.
$g_e$ : Tasa de crecimiento efectiva.
$s_e$ : Propensión marginal ahorrar efectiva.
$v_e$ : Relación capital - producto efectivo.

### 2.1.4 Trayectoria de Crecimiento del producto

En esta parte se va definir la trayectoria de crecimiento garantizada y efectiva, con sus respectivas demostraciones.

**a) Trayectoria de Crecimiento Garantizada**

Es la ruta de crecimiento del producto de satisface a los empresario, al igual que el ahorro y la inversión a través del tiempo.

$$Y_t = Y_0(1+g_w)^t$$

Esta ecuación nos dice; que el producto en el periodo "t" crece a la tasa de crecimiento garantizada, partir de su valor inicial "$Y_0$".

Donde $g_W$ es la tasa de crecimiento garantizada ("warranted rate of growth") de la economía, *s:* La propensión marginal ahorrar (la fracción del ahorro con respecto al PBI)

[6] Harrod no dice, que en el campo de la dinámica a diferencia de lo que ocurriría en el campo de la estática, una salida de la trayectoria de equilibrio en vez de autocorregirse se autoempeora. Debido a esto él consideró que $g_W$ representa una trayectoria de equilibrio pero inestable

$$Y_t = Y_0\left(1+\frac{s_r}{v_r}\right)^t$$

Demostración; De la condición de equilibrio macroeconómico

$$I = S \Rightarrow v_r.\underbrace{\Delta Y_{t+1}} = s_r.Y_t$$

$$v_r.[Y_{t+1} - Y_t] = s_r.Y_t \Rightarrow v_r.Y_{t+1} - v_r.Y_t - s_r.Y_t = 0$$

$$v_r.Y_{t+1} - (v_r + s_r).Y_t = 0$$

Dividiendo a la ecuación anterior entre $v_r$

$$\frac{v_r}{v_r}.Y_t - \underbrace{\left[\frac{v_r}{v_r}+\frac{s_r}{v_r}\right]}.Y_t = 0$$

$$Y_{t+1} - b.Y_t = 0$$

Características de la ecuación; Ecuación diferencial ordinaria, 1º orden (Primera diferencia), 1º grado (coeficiente constante "t") y termino nulo.

Solución homogénea; $Y_t = A.b^t$ , A>0, $b$ >0 y $t$>0

Donde; $b = \left[1+\frac{s_r}{v_r}\right]$ , A = es constante $Y_0$

Reemplazando en la solución homogénea $Y_t = Y_0\left(1+\frac{s_r}{v_r}\right)^t$

**b) Trayectoria de Crecimiento Efectivo**

Es la ruta de crecimiento de la producción efectiva a través del tiempo

$$Y_t = Y_0(1+g_e)^t$$

$$Y_t = Y_0\left(1+\frac{s_e}{v_e}\right)^t$$

Crece a una tasa constante y lo hace a través del tiempo del producto efectivo en el periodo "*t*" a la tasa constante efectiva "$g_e$" y lo hace a partir de su valor inicial.

### 2.1.5 Tasa de Crecimiento Natural

*Harrod* considera también que hay una tasa de crecimiento el cual la llama tasa natural. Esta depende del incremento de la población. No existe tendencia inherente alguna coincidan pues, para empezar, no existe una única tasa de crecimiento garantizado ya que esta depende del nivel de actividad.

Para esto plantea un análisis de dinámica, el equilibrio de mercado de trabajo ocurre cuando se igualan las tasas de crecimiento de la oferta con la demanda de trabajo.

El sistema económico no puede avanzar a una velocidad mayor que la que la tasa natural. Si la tasa de crecimiento posible fuera superior a la tasa natural se produciría una tendencia a la depresión, por el mecanismo explicado previamente. Por esto, cuando la tasa garantizada empieza a exceder la tasa natural, aquella debe ser reducida[7].

$$g_s^L = g_d^L \Rightarrow m \equiv g$$

Donde;

$g_s^L$ : Tasa de crecimiento de la oferta de trabajo ($m$)

$g_d^L$ : Tasa de crecimiento de la demanda de trabajo ( $g$ )

### 2.1.6 Acerca del Crecimiento Proporcionado

Harrod nos dice que el crecimiento en el cual todas las variables agregadas crecen a la misma tasa constante, en el cual su modelo de crecimiento proporcionado se expresa cuando se iguala a las tres tasa de crecimiento.

$$g_e = g_w = g_n$$

- **Proposición**
  La economía capitalista en el largo plazo puede lograr el crecimiento proporcionado, pero ello tiene la baja probabilidad. Harrod señala que es muy difícil que en el capitalismo se de el crecimiento proporcionado, por que ello significa lograr un crecimiento con el pleno uso productivo a través del tiempo, debido a que en el capitalismo existe incertidumbre, riesgo y que los capitalista para inversión, debe tomar en cuenta dichas situaciones, en consecuencia es muy difícil que se igualen las tres tasas de crecimiento por que cada uno de ellos es independiente.

- **Proposición de keynes**
  Keynes nos dice que la economía en el corto plazo puede tener un equilibrio con desempleo (diferencia con los clásicos).

- **Proposición de harrod**
  Harrod extiende la proposición de Keynes alargo plazo y propone una hipótesis que se formule y que se demuestre.

### 2.1.7 Acerca de la Inestabilidad

Harrod no da su proposición en que la economía en el argo lazo tiende a un equilibrio inestable, donde cualquier diferencia entre la tasa de crecimiento efectivo y la tasa de crecimiento garantizado lleva a la economía alejarse del equilibrio, por eso nos plantea dos casos:

**Caso I** ($g_e < g_W$)
Este el caso entre recesión e inflación, se plante a que el incremento del capital efectivo supera al incremento del capita requerido ante lo cual los empresarios los empresarios diminuyen la tasa de crecimiento efectivo, ampliando la brecha de diferencia con la cual se expresa la recensión de la economía.
**Caso II** ($g_e > g_W$)
En este caso de plante el auge e inflación, esto se da cuando el incremento del capital efectivo es inferior al crecimiento del capital garantizado requerido. Ante lo cual los empresarios aumentan la inversión y con ello elevan el proceso de producción efectivo, elevando la tasa de crecimiento efectivo y con ello ampliando la brecha.

[7] El lector puede concluir que, la tasa de crecimiento garantizado no puede superar a la tasa natural, sino que debería ser igual.

### 2.1.8 Políticas de Crecimiento ejercicios resueltos

**Problema #1**
Hallar la tasa de ahorro de la sociedad que permite una tasa de crecimiento del producto de 8.2%, conociendo que la relación capital – producto es 1.5.

**Rpt:**

Sabiendo que $g_w = \frac{s}{v} \Rightarrow s = g_w.v \ \Rightarrow s = 8.2\%x1.5 = 0.123$
Entonces el ahorro de la sociedad es de 12.3%.

**Problema #2**
Se sabe que la tasa de crecimiento del producto per cápita es de 8%, la relación capita – producto es de 3 y la tasa de crecimiento de la población es de 1% al año. Se pide hallar la tasa de ahorro de la sociedad.

**Rpt:**

Se sabe la relación per cápita esta expresada como; $\frac{Y_t}{L_t} = y_t \Rightarrow Y_t = y_t.L_t \ldots(I)$

Adelantando un periodo a la relación per-cápita[8]. $Y_{t+1} = y_{t+1}.L_{t+1} \ldots(II)$

Dividiendo $(II)$ entre $(I)$
$\frac{Y_{t+1}}{Y_t} = \frac{y_{t+1}}{y_t}.\frac{L_{t+1}}{L_t}$ Aplicando logaritmo neperiano

$$Ln\left(\frac{Y_{t+1}}{Y_t}\right) = Ln\left(\frac{y_{t+1}}{y_t}\right) + Ln\left(\frac{L_{t+1}}{L_t}\right) \Rightarrow g_Y = g_y + g_L$$

$$g_{PBI} = g_{PBI(per-cápita)} + g_{(pobla)}$$

Donde:

$g_{PBI}$ : Tasa de crecimiento del producto
$g_{pobla}$ : Tasa de crecimiento poblacional
$g_{PBI(per-cápita)}$: tasa de crecimiento del producto per-cápita

De al ecuación de Harrod $g_w = \frac{s}{v} \Rightarrow s = (g_w).v \Rightarrow s = (g_{PBI(per-cápita)} + g_{(pobla)}).v$

$$s = (8\% + 1\%).3 = 0.27$$

La tasa de ahorro de la sociedad es de 27%.

[8] Otra manera de expresar esta relación y poder obtener tasas de crecimiento de forma sencilla es mediante un truco matemático, para esto expresaremos la relación per-cápita, luego aplicaremos logaritmo y por ultimo tomaremos una derivada parcial a la ecuación.

$$\frac{Y_t}{L_t} = y_t \Rightarrow Y_t = L_t.y_t \Rightarrow \ln(Y_t) = \ln(L_t) + \ln(y_t) \Rightarrow \frac{d(\ln Y_t)}{dt} = \frac{d(\ln y_t)}{dt} + \frac{d(\ln L_t)}{dt}$$

Entonces esto queda expresado en tasas de crecimiento como se aprecia $g_{Y(t)} = g_{y(t)} + g_{L(t)}$

**Problema #3**

Se sabe que la tasa de crecimiento de un país el año 2008 fue de 9.3% y el capital utilizado fue de 21,000 mil millones de dólares y el producto fue de 5,500 mil millones de dólares. Se pide hallar la tasa de ahorro de la sociedad.

**Rpt:**

De la relación capital – producto $v = \frac{K}{L} = \frac{21{,}000}{5{,}500} = 3.81$

Reemplazando este resultado en la ecuación de Harrod

$$g_w = \frac{s}{v} \Rightarrow s = g_w.v \Rightarrow s = 9.3\% x 3.81 = 0.35443$$

Entonces la tasa de ahorro e esta sociedad es de 35.4443%

## 2.2 *Modelo de Domar*

En 1946 Evsey D. Domar, publicó su artículo Capital Expansion, Rate of Growth, and Employment.[9] En este árticulo crea un modelo en el cual plante determinar la tasa de crecimiento de la inversión que permite el pleno uso de la capacidad productiva, analizando desde un enfoque post-keynesiano, busca hacer una extencion de Keynes a largo plazo.

- Plantea que la inversión tiene un doble rol $\begin{cases} \text{Generar demanda efectiva (CP)} \\ \text{Creador de nueva capacidad productiva (LP)} \end{cases}$
- Plantea la productividad promedio social potencial y lo define como la razon de la tasa de cambio producción potencial asociada a la inversión $\sigma = \frac{d\overline{Y}}{I}$.

### 2.2.1 Supuesto del modelo

Domar considera los siguientes supuestos para su modelo:

- ✓ Sea una economía sin relación con el exterior.
- ✓ Sea una productividad promedio social potencial fija: $\sigma$
- ✓ Los precios de la economía son constantes.
- ✓ El ahorro y la inversion son netos de depreciación.
- ✓ El ahorro agregado,s, es una proporción de indreso naacional, dado la propencion marginal ahorrar *[pmg(s)].* $S = s.Y \qquad 0 < s < 1$
- ✓ La ausencia de “lags”(retrasos), todo se refiere al mismo período.
- ✓ La fuerza de trabajo agregada crece a una tasa constante y exogena: $n$
- ✓ La función de inversión es de tipo acelerador.
- ✓ se asume que la capacidad productiva es medible.

la depreciación es medida como el costo de reemplazo del activo depreciado, para adquirir otro con la misma capacidad productiva.

[9] En este articulo “Capital expantion, rate of growth and employment” (la expansión del capital, la tasa de crecimiento y el empleo) de 1946 se expresa su tendencia keynesiana.

## Función de Producción Agregada

Según Solow, Domar plantea la siguiente función de producción agregada tipo Leontief. Esta producción se obtiene a partir de una proporción fija de capital y trabajo.

$$Y_t = Min\{\sigma.K_t, b.L_t\}$$

Donde:

$Y_t$ : Producción agregada en el instante,"*t*"

$K_t$ : Stock de capital en el instante, "*t*"

$L_t$ : Fuerza de trabajo

$b$ : Relación producto trabajo

$\sigma$ : Relación producto capital (reciproco de; $\frac{1}{v}$)

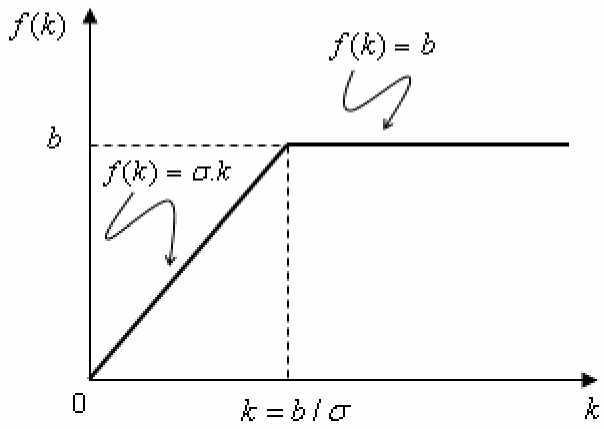
Si queremos expresar la función de producción en términos per-cápita, debemos dividir la función de producción entre $L_t$.Esto quedara expresado como;

$$y_t = Min\{\sigma.k_t, b\}$$

Donde la relación capital – trabajo esta representada; $\tilde{k} = \sigma / b$, con esto la función de producción puede expresarse de la siguiente manera[10]:

$$y_t = \begin{cases} \sigma.k_t & \text{Para todo } k_t < \tilde{k}_t = b/\sigma \\ b & \text{Para todo } k_t \geq \tilde{k}_t = b/\sigma \end{cases}$$

**Gráfica 2.2: La función de producción per cápita de Domar**




En el Gráfico [2.2] podemos apreciar que para un $k_t$ grande, la función de producción es horizontal y para cual quier nivel de $k_t$ se tiene una recta, y esto esta dado por la ecuación de la recta $\sigma.k_t$.

Domar considera que el sistema keynesiano carecía de herramientas para derivar la tasa de crecimiento de equilibrio, por que, el empleo es función del nivel de ingreso. Para modificar esto, su propuesta es hacer del empleo una función del ratio del ingreso sobre la capacidad productiva*, Y/P*.

[10] Para el mejor entendimiento de este modelo y los casos que se desarrollan, véase; Sala-I-Martín (1994), "Apuntes de Crecimiento Económico", Antoni Bosch, pp. 70-76

Suponiendo que la inversión ocurre a una tasa anual, y que produce un incremento en la capacidad productiva de modo que su ratio es igual a

$$s = \frac{\frac{\partial P}{\partial t}}{I} \cdots (I)$$

El ahorro($s$) es el maximo en que la capacidad productiva del incremento de la inversión a la tasa anual, puede producir. En esta caso, el valor de la ecuación $(I)$ llegará a solo $\sigma$, que será definido como el promedio social potencial de la productividad de la inversion.

$$\sigma = \frac{\frac{\partial P}{\partial t}}{I} = \frac{d\overline{Y}}{I} \cdots (II)$$

### 2.2.2 Ecuación Fundamental

Artículo I. Por el lado de la demanda, aplicado la teoría de la demanda efectiva de Keynes tenemos;

$$I = S \Rightarrow I = s.Y \Rightarrow Y_t = \frac{1}{s}.I \cdots (III)$$

Derivando la ecuación $(III)$ con respecto a *"t",* tenemos;

$$\frac{dY}{dt} = \frac{1}{s}.\frac{dI}{dt} \cdots (IV)$$

Artículo II. Por el lado de la oferta tenemos a partir;

$I = v.\frac{d\overline{Y}}{dt} \Rightarrow I = \frac{1}{\sigma}.\frac{d\overline{Y}}{dt} \Rightarrow \frac{d\overline{Y}}{dt} = \sigma .I \ldots (V)$.La tasa potencial va depender del volumen de inversión.

Artículo III. En el Equilibrio, se asume que en el inicio existe un equilibrio entre: la producción efectiva; $Y_t$ y la producción potencial $\overline{Y}_t$

$Y_t \equiv \overline{Y}_t \Rightarrow$ análisis dinámico $\frac{dY_t}{dt} \equiv \frac{d\overline{Y}_t}{dt} \Rightarrow$ reemplazando *(IV)* y *(V).*

$$\frac{1}{s}.\frac{dI}{dt} = \sigma .I \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{I}.\frac{dI}{dt}} = \sigma$$

$g_I^* = s.\sigma$ , *La ecuación fundamental de Domar*

La tasa de crecimiento ($g_I^*$) permite lograr el pleno uso de la capacidad productiva.
Donde:
$s$ : Pmg(*s)*
$\sigma$ : Relación producto – capital.
$g_I^*$: Tasa de crecimiento de la inversión en equilibrio.

### 2.2.3 Trayectoria de la Inversión

Significa que la inversión en el instante,"*t*" crece a una tasa "$s.\sigma$" y lo hace a partir de su valor inicial. Lo dicho anteriormente se puede expresar mediante la siguiente ecuación.

$$I = I_0 e^{s\sigma . t}$$

La preocupación de Domar en este trabajo tiene un tema adicional, que se ha perdido en la línea central de desarrollo del pensamiento sobre crecimiento económico, esto es que el crecimiento debe ocurrir sin generar desempleo.

Demostración:

$$g_I^* = s.\sigma \Rightarrow \frac{1}{I}.\frac{dI}{dt} = s.\sigma \Rightarrow \frac{d(LnI)}{dt} = s.\sigma \Rightarrow d(LnI) = s.\sigma .dt$$

Sea $e^c = I_0$ $\quad \int d(LnI) = \int s.\sigma .dt \Rightarrow LnI = s.\sigma .t + c$

$e^{LnI} = e^{s.\sigma.t}.e^c \Rightarrow I_t = I_0.e^{s.\sigma.t}$, *trayectoria de la inversión*.

### 2.2.4 Política de Crecimiento ejercicios resueltos

**Problema #1**

Determinar la tasa de ahorro de la sociedad, tal que permita lograr el pleno uso de la capacidad productiva y que se logre un crecimiento de la inversión de 9.3%, se conoce que la relación producto - capital es de 1/3.

**Rpt:**

Sabemos que la ecuación fundamental de domar esta expresado como;

$$g_I^* = s.\sigma \Rightarrow s = \frac{g_I}{\sigma} = \frac{9.3\%}{1/3} = 0.279$$

La tasa de ahorro de la sociedad es de 27.9%

**Problema #2**

Determinar la tasa de ahorro de la sociedad, que permite lograr el pleno uso de la capacidad productiva y que logre un crecimiento 7.5%, sabiendo que la relación producto – capital es de 1/4.

**Rpt:**

**De la ecuación fundamental** $g_I^* = s.\sigma \Rightarrow s = \frac{g_I}{\sigma} = \frac{7.5\%}{1/4} = 0.3$

Entonces la tasa de ahorro de la sociedad es del 30%

## 2.3 *Modelo básico de Solow*

Robert Solow en 1956 publicó un ensayo titulado “A Contribution to the Theory of Economic Growth” (Una contribución a la teoría del crecimiento económico), Que seria de gran influencia para las generaciones futuras. A este aporte conocido es un modelo del crecimiento considerando la respuesta ortodoxa al modelo keynesiano de Harrod y Domar. Por este y otros trabajo más se le otorgo el *Premio Nobel de Economía en 1987*.

En este articulo Solow demostrará que si se descarta las proporciones fijas, como lo establecían Harrod-Domar el crecimiento regular no seria inestable, sino estable. Para esto Solow incorpora el equilibrio general estable, de que la función de producción que permite la sustitución de factores (capital y trabajo)[11].

[11] El lector interesado puede revisar el modelo con mas detalle ``A Contribution to the Theory of Economic Growth.'' (1956), pp: 56-94.

Partiendo del equilibrio macroeconómico entre ahorro e inversión; incluye: al capital físico como un activo acumulable, a la mano de obra como reproducible, al ahorro real como función del ingreso, la tasa de depreciación y el crecimiento poblacional. De manera general podemos decir con rigurosidad que, el modelo de Solow es un modelo de la síntesis clásico-keynesiana y parte de las siguientes hipótesis[12]:

Por que retomo la hipótesis del Keynesianismo:

- En el mercado de bienes: El ahorro es función del ingreso, la relación entre ahorro y la tasa de interés del enfoque neoclásico no ha sido considerada; conservo la ley psicológica fundamental de Keynes.
- En el mercado de trabajo: rechazó la teoría neoclásica, en el sentido de que la oferta de trabajo es independiente del salario real.

De la reflexión clásica o neoclásica retomó:

- La función de producción con factores sustitutivos (capital y trabajo).
- Todo el ahorro es invertido, por consiguiente necesariamente hay equilibrio en el mercado de los productos y por lo tanto no existe problema de salida o de demanda.

Este modelo podremos notar, la tasa de ahorro endógena y la ausencia del progreso tecnológico como en los modelos anteriores de Harrod y Domar.

### *Critica de Solow*

En esta parte Solow hace un balance de los modelos de crecimiento de Harrod y Domar.

- ✓ Modelo de crecimiento pesimista respecto al desenvolvimiento del capital.
- ✓ La proposición de Harrod, de que la ecuación del capital tienda a una ecuación inestable.
- ✓ Es como si tuviera un doble “filo”.
- ✓ Dichos modelo soslaya la sustitución de factores siendo ello su principal defecto.
- ✓ El periodo de auge del capitalismo en post-guerra coincide con el pronostico de Harrod y Domar.
- ✓ Solow plantea, un modelo neoclásico donde la relación entre factores sea variable.
- ✓ Importancia en que los factores se sustituye entre si.
- ✓ Nos dice que la economía capitalista en el largo plazo tiende a un equilibrio dinámico estable.
- ✓ La economía capitalista en el largo plazo tiende a un equilibrio dinámico proporción.

### 2.3.1 Supuestos del modelo

- ✓ Sea una economía de mercado donde solo se produce un bien el mismo que se consume e invierte[13].
- ✓ La relación capital-producto es endógena y flexible: $v$
- ✓ La fuerza de trabajo agregad crece a una tasa constante y exógena: $n$
- ✓ El ahorro agregado, s, es una proporción del ingreso nacional, dado la proporción marginal ahorrar.

---

[12] El modelo de Solow ha sido considerado como de inspiración neoclásica, ello por oposición al modelo de tipo Keynesiano de Harrod y Domar.

[13] Se supone una economía parecida a la de Robinson Crusoe, donde no hay empresas, ni empleados y ni mercados, donde Robinson combinaba su propio trabajo para producir.

- ✓ Mercado de competencia perfecta.
- ✓ La economía no tiene relación con el exterior.

**Función de Producción Agregada (*FPA*)**

Solow plantea una función de producción Neoclásica agregada que permite sustitución entre los factores de manera que dicha función puede ser expresada de la siguiente manera:

$$Y_t = F(K_t, L_t)\ldots(I)$$

Donde:

$Y_t$ : Producción agregada en el instante "*t*".

$K_t$ : Stock de capital agregado en el instante "*t*".

$L_t$ : Fuerza de trabajo en el instante "*t*".

Esta ecuación ($I$) representa el lado de la oferta de una economía simplificada y señala que el producto producido está en función de la acumulación de capital y del monto de mano de obra.

Esta función esta sujeta a Rendimiento de Escala Constante (*REC*), es decir, si se aumentan o disminuyen, los factores de producción en determinada proporción, por ejemplo ($II$), el producto aumentaría o disminuiría en la misma proporción, o sea, ($II$). De ahí que la función de producción pueda ser rescrita de la siguiente manera:

$$\lambda Y_t = F(\lambda.K_t, \lambda.L_t) = \lambda.F(K_t, L_t)\ldots(II) \qquad \forall\lambda \geq 0$$

Como se sabe la función presenta rendimiento constante a escala[14]. Entonces $\lambda > 1$, nos da $\lambda Y_t < F(\lambda.K_t, \lambda.L_t)$, si se invierte la desigualdad la función de producción agregada muestra rendimiento decrecientes a escala.

Si $\lambda = \dfrac{1}{L_t}$, reemplazado en la función $\dfrac{Y_t}{L_t} = F\left(\dfrac{K_t}{L_t}, 1\right) \Rightarrow y_t = F(k_t)\ldots(FPI)$[15]

Donde:

$k_t = \dfrac{K_t}{L_t}$: Cantidad por trabajo en el instante "t".

$y_t = \dfrac{Y_t}{L_t}$: Producción por unidad de trabajo en el instante "*t*".

La ecuación de la *(FPI)* expresa el producto por unidad de trabajo como una función del capital por unidad de trabajo solamente. Para entender la intuición de esta ecuación, supongamos un aumento en la escala de operaciones mediante un aumento proporcional en $L_t$ y $K_t$ donde el producto por trabajador no cambiaría.

[14] Como sabemos por microeconomía los rendimiento constante a escala da un numero de empresas que es indeterminado, esto quiere decir, que no esta determinado por el modelo. Y es nos permite trabajar con la función de producción en su forma intensiva.

[15] FPI: función de producción intensiva

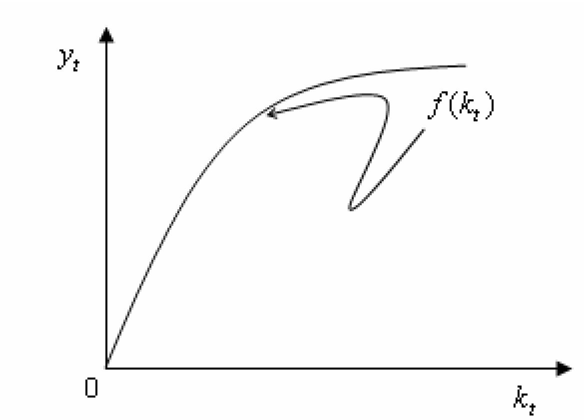
De manera que la producción por trabajador no depende del tamaño total de la economía sino, de la cantidad de capital por trabajad (persona activa). Como es sabido, la teoría de la producción se centra en los niveles de empleo de cualquier factor de producción para los que el producto marginal es positivo pero decreciente, de manera que para nuestra función de producción representada en la ecuación ($III$) tenemos:

$$y_t = f(0) = 0$$

$$PMg_k = \frac{dy_t}{dk_t} = f'(k) > 0 \ldots (CIO^{16})$$

$$\frac{dPMg_k}{dk^2} = f'(k) < 0 \ldots (CIIO^{17})$$

**Gráfica 2.3: La función de producción per cápita**




En el Gráfico [2.3] podemos apreciar la función de producción intensiva, que cumple con las condiciones de primer y segundo orden de la función.

La función es de buen comportamiento esto quiere decir que satisface las condiciones de INADA, es decir:

a) Sin factores productivos no hay producción.
b) La magnitud de los productos marginales ($PMg$) son positivos.

$$\frac{df}{dL_t} = f'_L > 0 \qquad\qquad \frac{df}{dK_t} = f'_K > 0$$

c) La curva de los productos marginales son decrecientes.

d) Cuando $k_t$ tiende al infinito, entonces el $PMg_{k(t)}$ tiene al vector nulo.

$$Lím_{K(t)\to\infty} = PMg_K = 0$$

e) Cuando $L_t$ tiende al infinito, entonces el $PMg_{L(t)}$ tiene al vector nulo.

$$Lím_{L(t)\to\infty} = PMg_L = 0$$

---

[16] CIO: Condición de primer orden para maximizar la función.
[17] CIIO: condición de segundo orden, y que nos asegura que $f(k)$ es cóncava y tiene un máximo.

f) Cuando $k_t$ tiende al cero, entonces el $PMg_{K(t)}$ tiene al infinito.

$$Lím_{K(t)\to 0} = PMg_K = \infty$$

g) Cuando $L_t$ tiende al cero, entonces el $PMg_{K(t)}$ tiene al infinito.

$$Lím_{L(t)\to 0} = PMg_L = \infty$$

### Inversión neta por trabajador ($I^n$)

Se plantea que la inversión neta por trabajador, va ser igual a la suma de la tasa de cambio por trabajador.

Demostración:

$k = \dfrac{K_t}{L_t} \Rightarrow K_t = k_t.L_t$, Derivado con respecto al tiempo,"*t*".

$$\frac{dK_t}{dt} = k_t.\frac{dL_t}{dt} + L_t.\frac{dk_t}{dt} \Rightarrow \dot{K}_t = k_t.\dot{L}_t + L_t.\dot{k}_t \ldots x\frac{1}{L_t} \Rightarrow$$

$$\underbrace{\frac{\dot{K}_t}{L_t}}_{I^n} = k.\underbrace{\frac{\dot{L}_t}{L_t}}_{g_l} + \frac{L_t}{L_t}.\dot{k}$$

$I^n = k.g_l + \dot{k} \Rightarrow$ $\quad$ $I^n = k.n + \dot{k}$, *la inversión por trabajador*

*Inversión neta por trabajador = Profundización del capital + Ampliación neta de capital*

Donde;

$\dot{k}_t$ : Tasa de cambio de capital por trabajador en el instante "*t*".

$k_t$ : Capital por trabajador en el instante "*t*".

$n$ : Tasa de crecimiento de la fuerza laboral.

$I^n$ : Inversión neta.

### 2.3.2 Ecuación Fundamental de *Solow*

De la condición de equilibrio macroeconómico tenemos:

$S = I \Rightarrow s.Y = I^n$

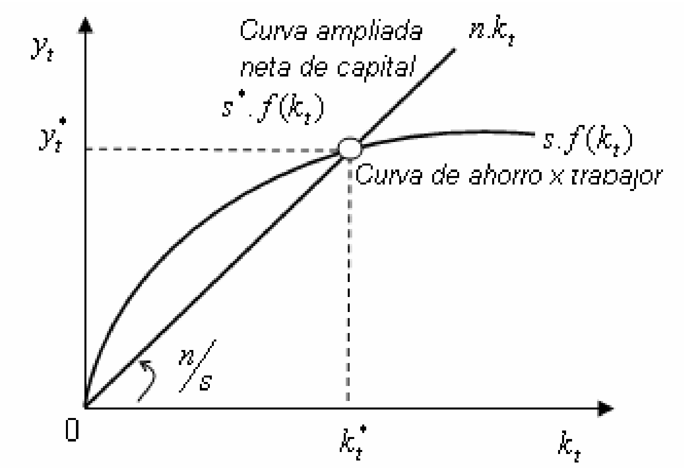
$$s.\overbrace{F(K_t, L_t)} = I^n \ldots x\frac{1}{L_t} \Longrightarrow s.\underbrace{f(\frac{K_t}{L_t},1)} = \underbrace{\frac{I_t}{L_t}}$$

$$s.f(k_t) = \dot{k}_t + n.k_t$$, *la ecuación de Solow*

La versión de *Branson* de la ecuación fundamental de *Solow*

Si $\dot{k}_t = 0 \Longrightarrow$ $\quad$ $s.f(k_t) = n.k_t \Rightarrow \dfrac{f(k_t)}{k_t} = \dfrac{n}{s}$, se determina $\begin{cases} k^* \\ y^* \end{cases}$

**Gráfica 2.4: El Diagrama de *Solow***



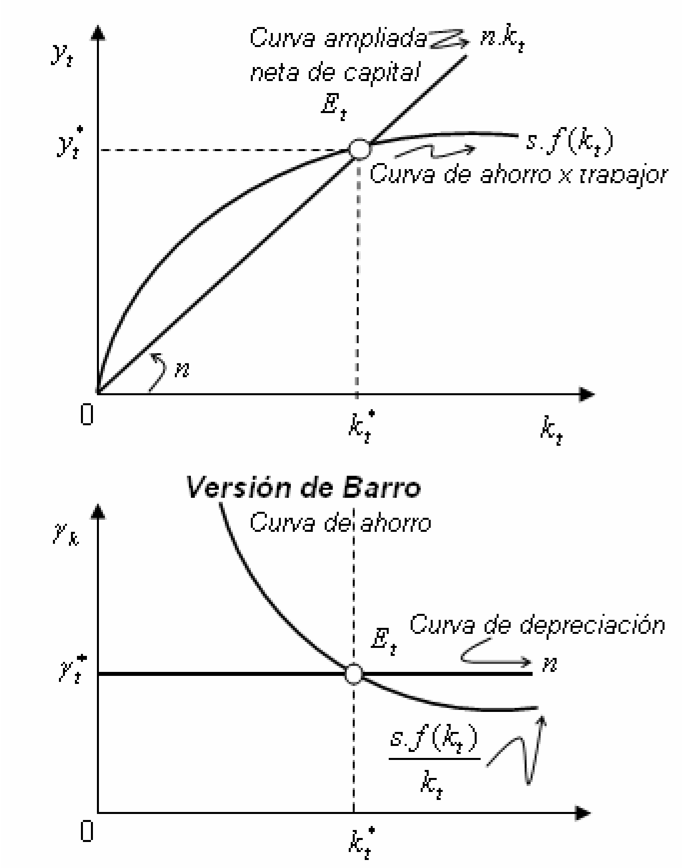

❖ **Versión de *Barro***

Nos dice que si partimos de la ecuación fundamental de *Solow*, y la dividimos entre el capital por trabajador nos dará la tasa de crecimiento proporcionado ($g_k$);

$s.f(k_t) = \dot{k}_t + n.k_t$, dividiendo entre $k_t$ $\Longrightarrow$ $\dfrac{\dot{k}_t}{k_t} = s.\dfrac{f(k_t)}{k_t} - n$

$$g_k = s.\frac{f(k_t)}{k_t} - n$$

**Gráfica 2.5: La función de producción**






Ejercicios de Crecimiento Económico

En el Gráfico [2.5], se puede apreciar que cuando, el crecimiento proporcionado $g_k$ es nulo, entonces $g_k = 0 \Rightarrow \dfrac{f(k_t)}{k_t} = \dfrac{n}{s}$, con lo cual se determina $k_t^*$.

### 2.3.3 Crecimiento Proporcionado

Es aquel crecimiento en que todas las variables agregadas crecen a la misma tas constante positiva.

$$g_Y = g_K = g_L$$

También se puede expresar en términos de variable por trabajador, donde el crecimiento

$$g_y = g_k = g_l = 0 \qquad\qquad g_K - g_L = g_k = 0$$

Proporcionado ocurre cuando las tasas de crecimiento de las variables por trabajador son nulas. $g_y = g_k = 0$

*Growth steady state:* $\begin{cases} \textit{Crecimiento proporcionado} \\ \textit{Crecimiento Balanceado} \end{cases}$

En el modelo de *Solow* el crecimiento proporcionado ocurre cuando; $g_k = 0 \rightarrow \dot{k}_t = 0$
Luego la ecuación Fundamental deviene:

$$\dot{k}_t = s.f(k_t) - n.k_t$$

Puesto que crece proporcionado cuando: $\dot{k}_t = 0$

$$0 = s.f(k_t) - n.k_t$$

$$s.f(k_t) = n.k_t$$

Con lo cual se determina el capital por trabajador de equilibrio.

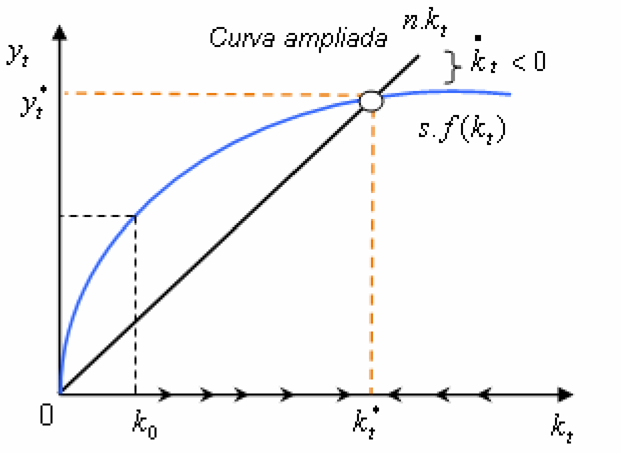
### 2.3.4 Sobre la Estabilidad

En una economía capitalista en el largo plazo tiende aun análisis de equilibrio dinámico de tipo estable, cualquiera que se a el valor inicial de la relación capital-trabajo ($k_t$), se generan fuerzas internas que llevan a que la relación capital-trabajo tienda a la relación capital trabajo de equilibrio.

- **Caso I ($k_0 > k^*$)**

En este caso vemos en el Gráfico [2.6] que, la economía tiene hoy un capital $k_0$, la inversión por trabajador (ahorro neto por trabajador) supera a la ampliación neta de capita. Esto quiere decir que va ocurrir una profundización ($k_0$ aumentara con el tiempo), hasta llegar a igualarse con el capital por trabajador $k_t^*$, cuando $\dot{k}_t = 0$, las curvas originado un punto $n.k_t = s.f(k_t)$, que es llamado el estado proporcionado, donde la cantidad de capital por trabajador permanece constante.

**Gráfica 2.6: La Estabilidad Caso (I)**



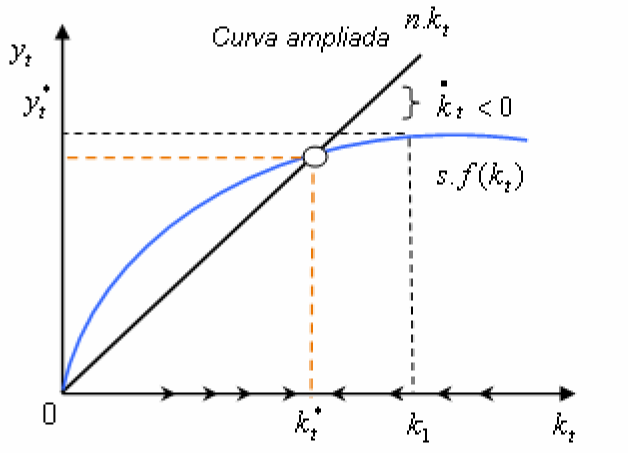

$$k_0 < k_t^* \Rightarrow Lím_{k(0)\to\infty} = k^*$$

❖ **Caso II** ($k_1 < k^*$)

Si el capital por trabajador se encuentra a la derecha $k_t^*$, como se puede apreciar en el Gráfico [2.7], donde el capital por trabajador esta expresado como $k_1$.En esta región la ampliación neta de capital supera al ahorro por trabajador, esto quiere decir que el ahorro es menor a la cantidad necesaria para mantener la proporción capital-trabajo constante.

Como $\dot{k}_t < 0$, por consiguiente la cantidad de capital por trabajador $k_1$ comienza a declinar hasta que se iguale con $k_t^*$.

**Gráfica 2.7: La Estabilidad Caso (II)**

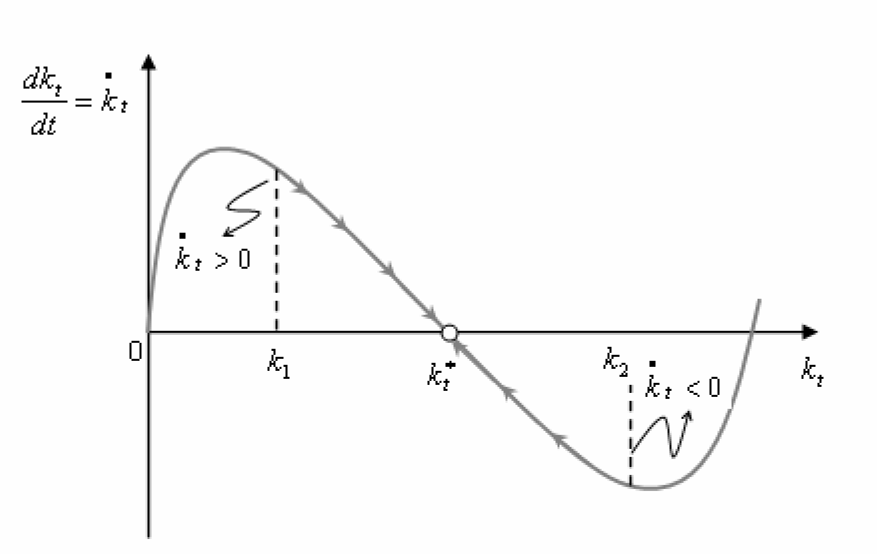



$$k_1 > k_t^* \Rightarrow Lím_{k(1)\to\infty} = k^*$$

### 2.3.5 Beneficios, salarios y distribución del ingreso

El modelo de *Solow* asume competencia perfecta en los mercados de bienes y de factores, plantea que para cualquier punto en la curva del producto se puede obtener lo siguiente:

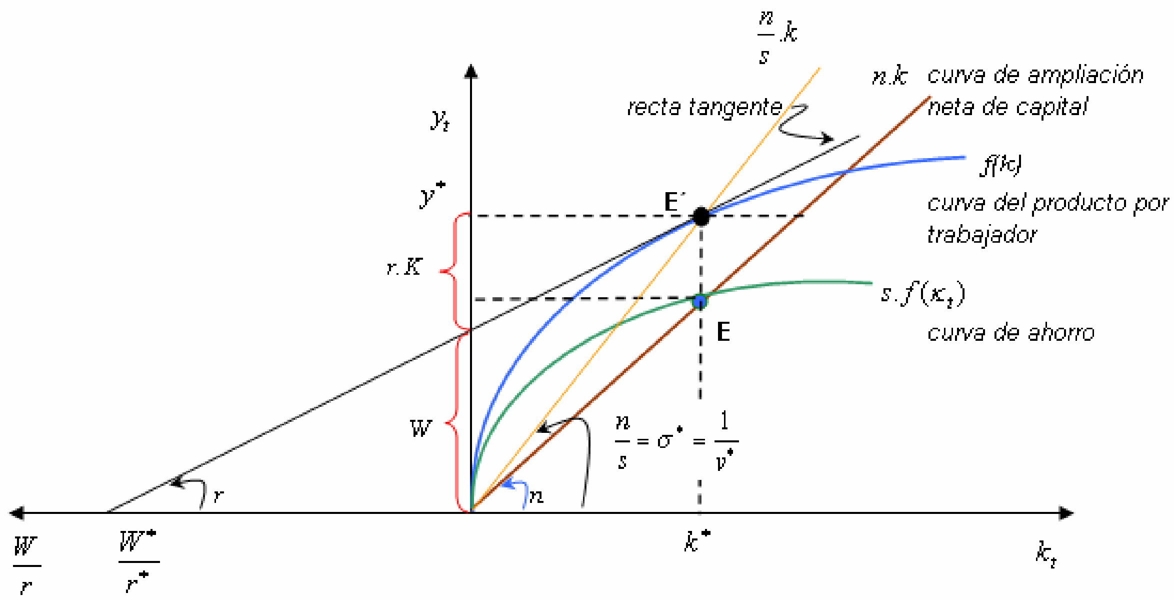
**Gráfica 2.8: El Diagrama de Fases**




En el Gráfico [2.8] podemos apreciar como $k_1$ y $k_2$ que se encuentran en la curva, tienden a $\overset{*}{k}_t$, donde este punto nos da el estado proporcionado del modelo. También se puede apreciar en el Gráfico que en $k_1$, la tasa de cambio por trabajador es positiva, pero en $k_2$, la tasa de cambio por trabajador es negativa.

- Los parámetros $\begin{cases} \nu^* : \textit{Relación capital-producto} \\ \sigma^* : \textit{Relación producto-capital} \end{cases}$
- Las variables por trabajador $\begin{cases} k^* : \textit{Capital por trabajador} \\ y^* : \textit{Producto por trabajador} \end{cases}$
- La retribución de los factores $\begin{cases} W : \textit{Masa de salario} \\ r : \textit{Tasa de interés} \end{cases}$
- Los precios relativos de los factores $\begin{cases} : \dfrac{W}{r} \end{cases}$

**Gráfica 2.9: La Distribución del Ingreso**




En el Gráfico [2.9] se aprecia como se a distribuido el ingreso entre la masa salarial ($W$) y el beneficio total ($r.K = B$).

Analíticamente la ecuación fundamental de *Solow*; $\dot{k}_t = s.f(k_t) - n.k_t$, en el estado del crecimiento proporcionado, $\dot{k}_t = 0$ entonces

$$\begin{cases} s.f(k_t) = n.k_t \text{, se determina : } k^* \\ f(k_t) = \dfrac{n.k_t}{s} \text{, se determina : } \begin{cases} k^* \\ y^* \end{cases} \end{cases}$$

❖ **Mercado de capitales**

Como, $y_t = f(k_t)$ esta definido como:

$\frac{Y_t}{L_t} = f(k_t) \rightarrow Y_t = f(k_t).L_t$, derivado con respecto a $K_t$

$$\frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = L_t.\frac{\partial f(k_t)}{\partial k_t} + f(k_t)\overbrace{\cancel{\frac{\partial L_t}{\partial K_t}}}^{\approx 0}$$

$$\frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = L_t.\frac{\partial f(k_t)}{\partial k_t}.\frac{\partial k_t}{\partial K_t} \Longrightarrow \frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = L_t.f'(k_t).\frac{\partial\left(K_t/L_t\right)}{\partial k_t}$$

$$\underbrace{\frac{\partial Y_t}{\partial K_t}}_{PMgK_t = f'(k_t)} = L_t.f'(k_t).\frac{1}{L_t}$$

❖ **Mercado de Trabajo**

$$PMgL_t = W$$

$$PMgL_t = f(k_t) - r.k_t \quad \Rightarrow \quad \underbrace{PMgL_t}_{W} = f(k_t) - f'(k_t).k_t$$

$$W = f(k_t) - f'(k_t).k_t$$

### 2.3.6 Distribución del Ingreso

En esta parte veremos como se divide el ingreso, en masa salarial y beneficio.

$Y = W + B \Rightarrow Y = w.L + r.K \ldots(\phi)$

Dividiendo a la ecuación ($\phi$) entre $\frac{1}{L_t}$, nos dará:

$\frac{Y}{L} = w. + r.k \ldots(\varphi) \rightarrow$ *Producto x Trabajador = Tasa de salario + Beneficio neto x trabajador*

Dividiendo a la ecuación ($\varphi$) entre $y$, nos dará:

$$1 = \frac{w}{y} + \frac{r.k}{y}$$

Donde:

$\frac{w}{y}$ : Participación del salario en el ingreso nacional.

$$\frac{w}{y} = \frac{w}{Y/L} = \frac{w.L}{Y} = \frac{W}{Y}$$

$\frac{r.k}{y}$ : Participación de los beneficios en el ingreso nacional.

$$\frac{r.k}{y} = \frac{r.(K/L)}{Y/L} = \frac{r.K}{Y} = \frac{B}{Y}$$

## 2.4 *Modelo de Solow – Swan*

El modelo de crecimiento con función Cobb-Douglas, desarrollado por Solow y Swan de manera separada en 1956. Este modelo hace referencia a los supuestos, de ecuaciones fundamental, al examen de cómo se alcanza el equilibrio.

Todavía en esta parte se supone que no existe progreso tecnológico en el siguiente Capítulo de este libro (III), veremos como influye la tecnología en el crecimiento de producción de un país.

### 2.4.1 Supuestos del modelo

A los supuestos básicos del modelo de *Solow* se le añaden los siguientes supuestos particulares:

- ✓ Utiliza una función de producción Cobb-Douglas.
- ✓ El stock de capital se deprecia a una tasa constate exógena: $\delta$

## Función de Producción agregada (FPA)

La función de producción neoclásica, es homogénea de grado uno o linealmente homogénea, con rendimientos constantes a escala y, además, con rendimientos marginales de cada uno de los factores, positivos y decrecientes.

$$Y_t \equiv F(K_t, L_t, A) = A.K_t^{\alpha}.L_t^{1-\alpha} \ldots (I) \qquad \text{con: } 0 < \alpha < 1$$

s.a: { *Rendimientos de escala constante.*[18]
*Rendimientos decrecientes.* }

Donde:

$A$ : Índice de Nivel de tecnología[19].
$\alpha$ : Elasticidad del producto respecto al capital.
$Y_t$ : Producción agregada en el instante "*t*".
$K_t$ : Stock de capital agregado en el instante "*t*".
$L_t$ : Fuerza de trabajo agregada.

Si multiplicado a la ecuación ($I$) por $\lambda > 0$, comprobaremos que la función es homogénea de grado uno.

$$\lambda.Y_t = A(K_t.\lambda)^{\alpha}.(\lambda.L_t)^{1-\alpha} \Rightarrow \lambda.Y_t = A\lambda^{\alpha}.K_t^{\alpha}.\lambda^{1-\alpha}.L_t^{1-\alpha} \Rightarrow \lambda.Y_t = \lambda.A.K_t^{\alpha}.L_t^{1-\alpha}$$

Por lo tanto queda comprobado que a función es homogénea de grado uno.

Esta función también puede ser rescrita con la función de producción intensiva (FPI), de la siguiente forma:

Dividiendo a la ecuación ($I$), entre $L_t$

$$\frac{Y_t}{L_t} = \frac{A.K_t^{\alpha}.L_t^{1-\alpha}}{L_t} \Longrightarrow y_t = A.K_t^{\alpha}.L^{-\alpha} \Rightarrow y_t = A.\left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\alpha} \Longrightarrow y_t = A.k_t^{\alpha} \ldots (FPI)$$

- La productivaza marginal de capita ($k_t$) es positiva.

$$\frac{df(k_t)}{dk_t} = f'(k_t) = \alpha.k_t^{\alpha-1} > 0$$

- La función es cóncava (por que la segunda derivada es negativa).

$$\frac{d^2 f(k_t)}{dk_t^2} = f''(k_t) = -\alpha(1-\alpha).k_t^{\alpha-2} < 0$$

- Satisface las condiciones correspondientes a INADA (Inada, 1964).

---

[18] *Charles Cobb*[μ] y *Paul Douglas*[ψ] (1928) propusieron una función de producción, tal que los factores de producción cobran sus productos marginales. En su análisis de la manufactura de los EE.UU.

[μ] Fue un matemático amigo de charles.

[ψ] Fue senado por Illinois entre 1949-1966 y profesor de economía.

[19] Generalmente se supone o se asume que el índice de nivel de tecnológico es la unidad, donde $A_t = A$.

$$Límf'(k_t)_{k(t)\to\infty} = \alpha.\cancelto{\approx 1/\infty}{\frac{1}{k^{1-\alpha}}} = 0$$

$$Límf'(k_t)_{k(t)\to 0} = \alpha.\cancelto{\approx 1/0}{\frac{1}{k^{1-\alpha}}} = \infty$$

❖ **Crecimiento poblacional**

*Solow* considera que toda la población está empleada y, además, crece a una tasa constante determinada exógenamente. Su forma funcional es:

$$\frac{\dot{L}_t}{L_t} = n$$

### 2.4.2 Ecuación Fundamental de *Solow - Swan*

De la ecuación fundamental de *Solow* con depreciación tenemos:

$$\dot{k}_t = s.f(k_t) - (n+\delta).k_t \ , \quad y_t = f(k_t)$$

Pero la función de producción Cobb-Douglas; $y_t = A.k_t^{\alpha} \Rightarrow f(k_t) = A.k_t^{\alpha} \ldots (FPI)$

Reemplazando la (*FPI*) en la ecuación de *Solow.*

$$\dot{k}_t = s.Ak_t^{\alpha} - (n+\delta).k_t$$ , *La Ecuación fundamental de Solow – Swan*[20]

Esta ecuación diferencial de acumulación de capital, donde la tasa de cambio del capital por trabajador es igual al remanente del ahorro bruto por trabajador respecto a la ampliación bruta de capital.

### 2.4.3 Estado de Crecimiento Proporcionado

Que lo traducen como *estado estacionario* (Growth steady state), en este estado de crecimiento proporcionado, cuando $\dot{k}_t = 0$, entonces $s.Ak_t^{\alpha} = (n-\delta).k_t$ se determina $k_t^*$.

Hallando $k_t^*$:

$$\frac{s.A}{n+\delta} = \frac{k_t}{k_t^{\alpha}} \Longrightarrow \frac{s.A}{n+\delta} = k_t^{1-\alpha} \Longrightarrow k_t^* = \left(\frac{s.A}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Donde el asterisco ($*$) denota el valor de equilibrio de la variable.

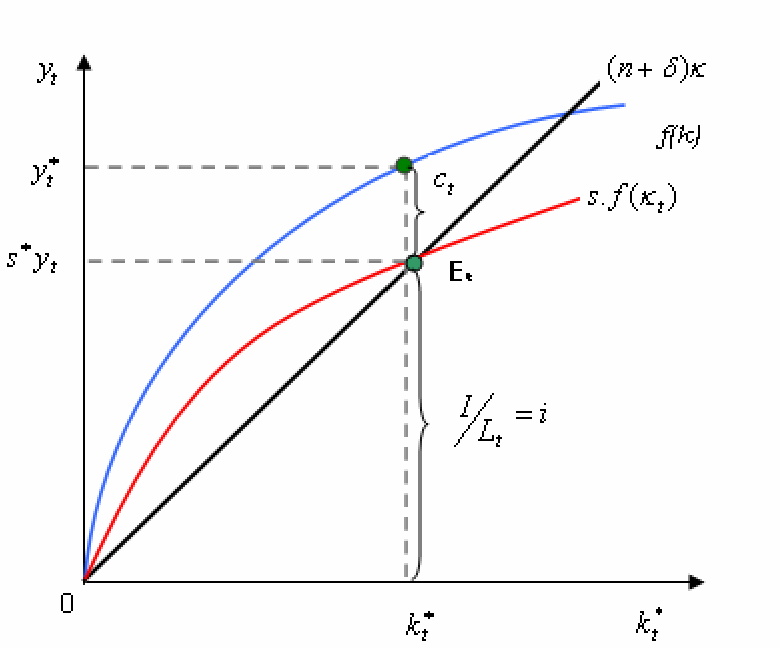
---

[20] Se recomienda al lector que trate de recordar esta ecuación ya que será utilizada a lo largo de este libro en los distintos modelos que se representaran en los capítulos siguientes.

Reemplazando el $k_t^*$ hallado en la (FPI), nos da el valor de producto por trabajador de equilibrio ( $y_t^*$ ).

$$y_t = A.k_t^{\alpha} \quad \Longrightarrow \quad y_t^* = \left(\frac{s.A}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

**Gráfica 2.10: Estado Proporcionado de las variables**




En el Gráfico [2.10] podemos apreciar que en el estado de crecimiento proporcionado se determina, $k_t^*$ e $y_t^*$. Donde también se aprecia que la tasa de ahorro , $s$, donde esta determina el reparto entre consumo por trabajador ( $c_t$ ) y inversión por trabajador ( $i_t$ ). En el cualquier nivel de $k_t$ la producción es $f(k_t)$ , la inversión por trabajador es $s.f(k_t)$, y el consumo por trabajador es $f(k_t)-s.f(k_t)$.

## ❖ Versión de *Barro*

A partir de la ecuación fundamental de *Solow – Swan* con depreciación;

$\dot{k}_t = s.f(k_t)-(n-\delta).k_t$ , dividiendo a esta ecuación entre el capital por trabajador de equilibrio ( $k_t$ ), tenemos:

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t} = s.A.\frac{k_t^{\alpha}}{k_t}-(n+\delta)\ldots(II)$$

$\gamma_k = s.A.\frac{k_t^{\alpha}}{k_t}-(n+\delta)$, *La ecuación fundamenta Solow-Swan-Barro*

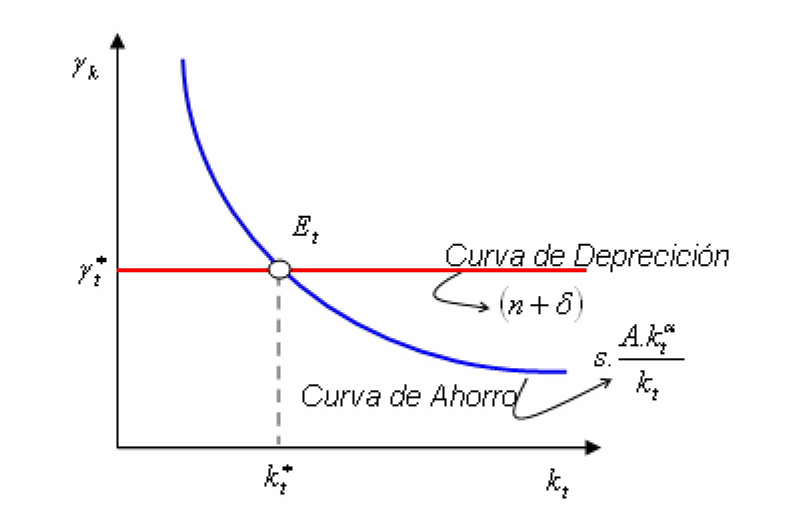
El miembro izquierdo de la ecuación ($II$) representa la tasa de crecimiento del capital per capita y es igual a la diferencia entre $s.k_t^{\alpha-1}$ (curva de ahorro) y $(n+\delta)$ (curva de depreciación).

En el crecimiento proporcionado la $g_k = 0$, entonces $\frac{s.A.k_t^{\alpha}}{k} = (n+\delta)$, se determina $k_t^*$.

Hallando $k_t^*$; $\frac{s.A}{n+\delta} = \frac{k}{k^{\alpha}}$ $\Longrightarrow$ $k_t^* = \left(\frac{s.A}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$

Donde: $\frac{\dot{k}_t}{k_t} = \gamma_k = g_k$ : Tasa de crecimiento del capital

**Gráfica 2.11: versión de *Barro***




En el Gráfico [2.11] podemos apreciar que la curva de ahorro es decreciente, tiende a cero cuando $k_t$ se aproxima a infinito y cuando k se acerca a cero (*CONDICIONES INADA*). En cuanto a la curva de depreciación es horizontal, es decir, es independiente de $k$. Considerando que ésta es estrictamente positiva y la curva $s.k_t^{\alpha-1}$ toma valores entre cero e infinito, las dos funciones (curvas) se cruzan una sola vez en la gráfica (punto $E_t$ ) y la $k_t^*$ correspondiente que representa a este punto es el capital per capita que existe en el estado proporcionado.

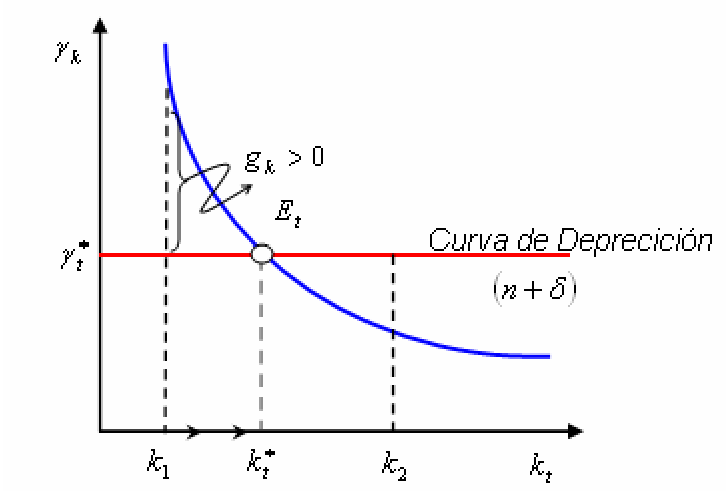
### 2.4.4 Acerca de la estabilidad

La economía capitalista en el largo plazo tiende a un estado de crecimiento proporcionado, y esto lo veremos en dos casos:

❖ **Caso I** ($k_1 > k^*$)

En este caso vemos en el Gráfico [2.12] que, la economía tiene hoy un capital $k_0$, la inversión por trabajador (ahorro neto por trabajador) supera a la ampliación neta de capita. Esto quiere decir que va ocurrir una profundización ($k_1$ aumentara con el tiempo), hasta llegar a igualarse con el capital por trabajador $k_t^*$, cuando $\dot{k}_t = 0$, las curvas originado un punto $(n+\delta).k_t = s.f(k_t)$, que es llamado el estado proporcionado, donde la cantidad de capital por trabajador permanece constante.

**Gráfica 2.12: La Estabilidad Caso (I)**



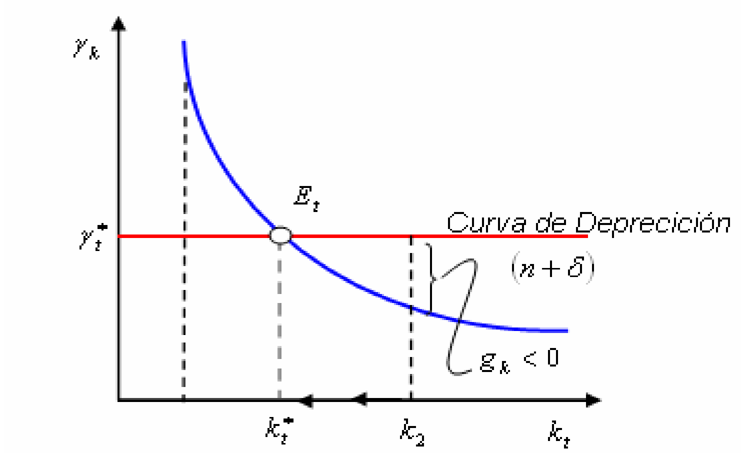

$$k_0 < k_t^* \Rightarrow Lím_{k(0)\to\infty} = k^*$$

❖ **Caso II ($k_2 < k^*$)**

Si el capital por trabajador se encuentra a la derecha $k_t^*$, como se puede apreciar en el Gráfico [2.13], donde el capital por trabajador esta expresado como $k_2$.En esta región la ampliación neta de capital supera al ahorro por trabajador, esto quiere decir que el ahorro es menor a la cantidad necesaria para mantener la proporción capital-trabajo constante.

Como $\dot{k}_t < 0$, por consiguiente la cantidad de capital por trabajador $k_1$ comienza a declinar hasta que se iguale con $k_t^*$.

**Gráfica 2.13: La Estabilidad Caso (II)**




$$k_2 > k_t^* \Rightarrow Lím_{k(2)\to\infty} = k^*$$

### 2.4.5 Dinámica de transmisión sobre la convergencia

Se le da el nombre de “Dinámica de transmisión”, por que hace preediciones del modelo que se relaciona con las tasa de crecimiento. En este sentido el modelo neoclásico trata de explicar la rapidez con la cual, la economía evoluciona hacia el estado proporcionado. En esta parte trataremos de explicar las implicarías de los dos tipos de convergencia:

#### *(a) Hipótesis de la convergencia Absoluta*

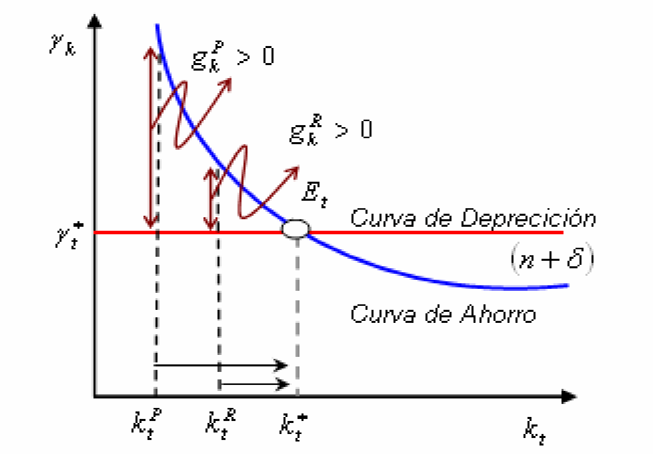
Esta primera hipótesis fue propuesta por historiadores económicos como Aleksander Gerschenkron (1952) y Moses Abramovitz (1986).

Plantean que a largo plazo los países del mundo que solo difieran en su relación capital trabajo, tenderán a un mismo estado de crecimiento proporcionado. En este sentido, aquellas economías que se encontraban en una situación menos favorable (nivel de ingreso per cápita inferior), tenderían a mostrar tasas de crecimiento superiores a las economías más desarrolladas (nivel de ingreso per cápita superior)[21].

❖ ***Implicancias***

Aquello países, que el mismo tiempo (inicio), tienen relativamente un menor capital por trabajador, crecen más rápido, que los países que tienen al inicio mayor capital por trabajador.

**Gráfica 2.14: La Convergencia Absoluta**




En el Gráfico [2.14], podemos apreciar que los países pobres que tienen menor capital por trabajador ($k_t^P$), en el largo plazo crecerán a una tasas mayores que los países ricos con mayor capital por trabajador ($k_t^R$).

$$k_t^P < k_t^R \Rightarrow g_k^P < g_k^R$$

Donde:

$g_k^P$ : Tasa de crecimiento del país pobre.

$g_k^R$ : Tasa de crecimiento del país rico.

*P:* Países pobres.
*R:* Países ricos.

*William Baumol* (1986), fue uno de los primeros en presentar evidencia documentada entre algunos países y la ausencia de convergencia de otros.

---

[21] Finalmente, por lo que respecta al concepto, debe mencionarse que en el caso de que las economías sean lo suficientemente parecidas si podrá esperarse la existencia de convergencia absoluta.

La critica de *Bradford De Long* (1988), es que la convergencia de *Baumol* para países desarrollados en el siglo pasado, era una muestra sesgada (por que solo usaba países industrializados). En particular *De Long* observo dos cosas: Primero solo incluía países industrializado (de la década del 1980), segundo al incluir a Argentina en la muestra, que era más rico que Japón en 1870, no se cumplía la convergencia Absoluta.

*Robert Barro* (1992), como se muestra a continuación utilizando una muestra de 98 países constata que la hipótesis de convergencia absoluta es invalidad.

El argumento de la convergencia absoluta fue rechazado por la evidencia empírica, ya que si bien algunos países han logrado un alto nivel de crecimiento sostenido, alcanzando los niveles de ingreso per cápita de las economías desarrolladas, las diferencias presentes entre los países más pobres del planeta y los más ricos muestran un alto grado de persistencia.

La polémica en torno a la convergencia entre los países generó gran abundancia de estudios empíricos en la década de los noventa que buscaba determinar su existencia en diferentes grupos de países, presentamos un cuadro [1.1] con los resultados de algunos estudios[22].

**Cuadro 1.1: La Convergencia en el mundo**

| Series analizadas | Referencia | Convergencia absoluta | Convergencia condicional |
|---|---|---|---|
| Mundo (110 países) | Salan-i-Martín (1996) | No | Si |
| Mundo (98 países) | Barro (1991) | No | Si |
| Mundo (98 países) | Mankiw, Romer, Weill (1992) | No | Si |
| Estados Unidos (48 estados) | Barro y Salan-i-Martín (1992) | Si | Si |
| OCDE (22 países) | Mankiw, Romer, Weill (1992) | Si | Si |
| Pacífico del sur (9 islas) | Cashin y Loayza (1995) | Si | Si |
| América Latina (12 países) | José de Gregorio (1995) | No | Si |
| América Latina (23 países) | Corbo y Rojas (1994) | No se responde | Si |
| México (32 estados) | Navarrete (1994) | No evidente | Si |
| México (31 estados) | J.Ramon y R.Bátiz (1996) | Si | Si |

### *(b) Hipótesis de la convergencia Condicional*

En el mundo existe una diversidad de economías que presenta un nivel de equilibrio particular, el cual depende de factores de carácter tecnológico, PBI per-cápita, tales como el nivel de alfabetismo y la esperanza de vida al nacer, institucional y social, hacia el cual se tiende a lo largo del tiempo.

Según el criterio del PBI per cápita (PPA en dólares), pueden haber distinto grupos de países[23].
El PNUD, distingue los países según su PBI per-cápita, como se puede apreciar en el cuadro [1.2], de la quinta columna, donde los países capitalista tiene un ingreso por persona superior o igual a 23,928 dólares.

---

[22] Véase la "Convergencia regional en América latina: 1980-2000" de Luís Fernando Cabrera Castellanos Blanca García Alamilla.
[23] PPA: paridad de poder de adquisición.



Ejercicios de Crecimiento Económico

*Cuadro [1.2]: INDICE DE DESARROLLO HUMANO. 1998*

| Grupo de países | Esperanza de vida al nacer (años) | Tasa de alfabetización de adultos (% de edad 15 y superior) | Tasa bruta de matriculación (primaria, secundaria y terciaria combinadas (%) | PIB per cápita (PPA en dólares) | Valor del Indice de Desarrollo Humano |
|---|---|---|---|---|---|
| Países con alto ingreso | 77,8 | 98,6 | 92 | 23.928 | 0,920 |
| Países con ingreso medio | 68,8 | 87,8 | 73 | 6.241 | 0,750 |
| Países con ingreso bajo | 63,4 | 68,9 | 56 | 2.244 | 0,602 |
| América Latina y el Caribe | 69,7 | 87,8 | 74 | 6.510 | 0,758 |
| Colombia | 70,7 | 91,2 | 71 | 6.006 | 0,764 |
| Total mundial | 66,9 | 78,8 | 64 | 6.526 | 0,712 |

Fuente: Elaborado con base en: PNUD. Informe sobre desarrollo humano 2000, p.157

Para nuestro análisis de la convergencia condicional nos centraremos en quinta columna de este cuadro, donde distingue los grupos por ingresos por persona.

Donde los países pobres no tienen necesariamente que alcanzar a los países más ricos en el estado estacionario; por el contrario, es probable que los países pobres tengan un stock de capital por trabajo efectivo muy cercano a "su correspondiente" estado estacionario. Esta hipótesis también implica que los países pobres.

❖ ***Planteamiento***

- ✓ Cada grupo de países tiende a largo plazo, a su propio estado de crecimiento proporcionado.
- ✓ Aquello países que al inicio tenían relativamente un menor capital por trabajador, crecerán dentro de su propio grupo , más rápido que los otros países que al inicio tenían más capital por trabajador.

Esto quiere decir que se dará la convergencia dentro de su propio grupo. Lo mismo se efectúa con los otros grupos de países si se constata que la convergencia condicional en plausible.

Un ejemplo de esto son; Japón, Corea, Singapur y Hong Kong, que 1960, crecieron con mayor rapidez en los últimos treinta años, tal como se expresa la hipótesis de convergencia condicional.

### 2.4.6 La regla de Oro de la acumulación

Esta regla nos quiere decir que el valor de $k_t$ del estado proporcionado que maximiza el consumo se le llama la *regla de oro de la acumulación de capital* y lo denotaremos con $k_t^{Oro}$[24].

[24] Así es como lo llama *Phelps* (1961) cuando hace referencia a la tasa de ahorro que maximiza el consumo en el estado proporcionado.

Para encontrar el stock de capital que se refiere *Phelps*, lo primero que debemos hacer es encontrar el estado proporcionado de la ecuación de *Solow – Swan*, por lo que $\dot{k}_t = 0$. Por lo que si reescribimos la ecuación, teniendo en cuenta que el ahorro es igual a la producción menos el consumo. Para expresar al consumo de estado proporcionado, $\dot{c}_t$, con función del capital en el estado proporcionado.

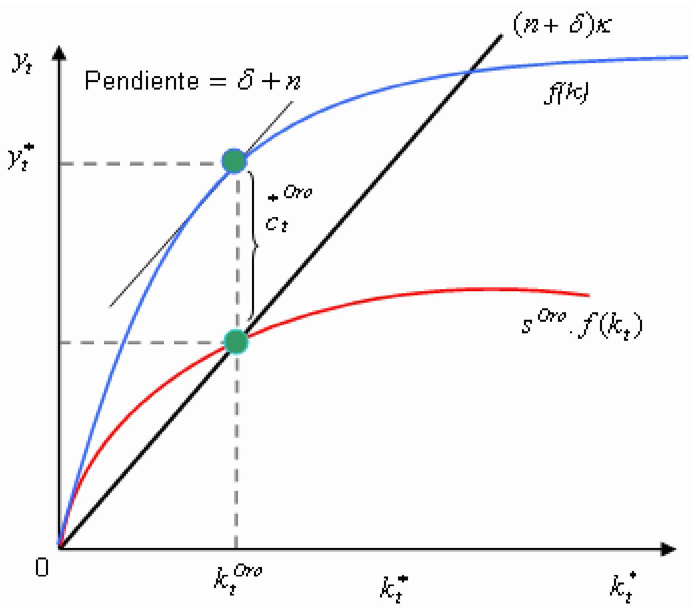
$$0 = f(k_t^*) - c_t^* - (\delta + n).k_t^* \quad \Rightarrow \quad c_t^* = f(k_t^*) - (\delta + n).k_t^* \ldots (\Psi).$$

La ecuación [$\Psi$] nos dice que el consumo en el estado proporcionado, es igual a la producción menos la depreciación. Esto quiere decir que un aumento del capital aumentara $f(k_t^*)$, el consumo en el estado proporcionado y por ultimo aumenta la cantidad de maquinas utilizadas en la producción, de esta manera se afecta a $(\delta + n).k_t^*$.

Para encontrar la regla mencionada ahora tenemos que maximizar el consumo en el estado proporcionado con respecto a $k_t^*$, entonces derivando a $c_t^*$ de la ecuación ($\Psi$), con respecto a $k_t^*$.

$$\frac{dc_t^*}{dk_t^*} = f'(k_t^*) - (\delta + n) = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(k_t^{Oro}) = PMgk = \delta + n \ldots (\Omega)$$

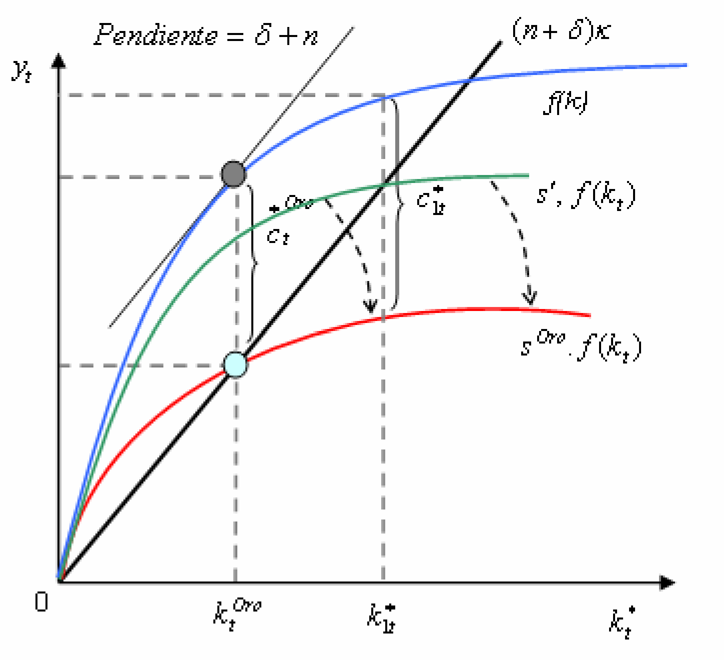
**Gráfica 2.15: La regla de Oro**




Como se puede apreciar en el Gráfico [2.15], que la ecuación ($\Omega$), expresa la pendiente de la curva, donde el punto de distancia entre las dos curvas es máxima y determina el consumo de oro ($c^{*Oro}_t$). Pero para alcanzar este punto es necesario encontrar el ahorro que haga que en el crecimiento proporcionado sea precisamente $k^{*Oro}_t$.

Ahora analicemos que pasa con la economía según el Gráfico [2.15] si tenemos un stock de capital superior a $k^{*Oro}_t$, entonces en este punto la economía se encontrara en un estado ineficiente.

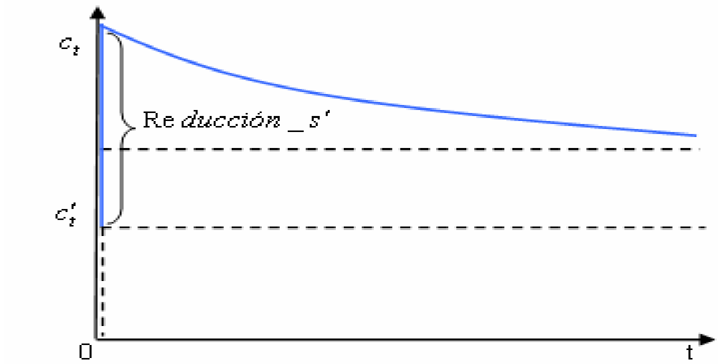
**Gráfica 2.15: Tasa de ahorro superior a la regla de Oro**




Esta economía podría aumentar su consumo si reduce la tasa de ahorro, a un nivel de la "*regla de oro*" ya que la tasa de ahorro esta relacionada con el consumo. Al reducir la tasa de ahorro, la curva de ahorro de la economía desplaza hacia abajo, durante este proceso el consumo queda definido como la diferencia entre la función de producción, $f(k_t)$, y la curva de ahorro $s^{Oro}.f(k_t)$.

Para apreciar mejor como a evolucionado el consumo con esta disminución del ahorro pasa remos a observar el Gráfico [2.16].

**Gráfica 2.16: Variación del consumo ante una reducción de $s'$**




A largo plazo la economía convergerá a $k_t^{*Oro}$, donde el consumo es superior y también es superior $k_t^*$. Entonces si la economía encuentra un $k_t^*$, entonces reducimos la tasa de ahorro a un $s^{Oro}$ y con esto conseguí aumentar el consumo en todos los momentos del tiempo.

Entonces podemos concluir que el consumo en el estado proporcionado es máximo en el estado proporcionado de la *regla de oro*.

### 2.4.7 Política de Crecimiento ejercicios resueltos

**Problema #1**

Suponga que existe una economía capitalista cuya función de producción agregada es $Y_t = A.K_t^{3/5}.L_t^{2/5}$, y se sabe que la tasa de ahorro de esta sociedad es de 30% del producto agregado cada año, también se sabe que; La tasa de depreciación del capital es de 8% al año, la tasa de crecimiento de la fuerza de trabajo es del 2% al año y por ultimo se sabe que el índice de nivel de tecnología es la unidad. Se pide:

a) Hallar la ecuación fundamental de *Solow – Swan*.
b) Hallar el estado de crecimiento proporcionado.
c) Hallar los valores de capital por trabajador y de producto por trabajador del estado proporcionado.
d) Hallar la tasa de salario y la tasa de rendimientos bruto del capital y graficar los valores.
e) Hallar la participación de los salarios y de los beneficios brutos en el ingreso nacional.

**Rpt:**

a) Hallar la ecuación fundamental de *Solow – Swan*.

De los datos tenemos: $s = 0.30$ , $\delta = 0.08$, $n = 0.02 \quad A = 1$

$Y_t = A.K_t^{3/5}.L_t^{2/5}$, dividiendo la función de producción entre la cantidad de trabajadores ($L_t$) tenemos:

Para operar con facilidad usaremos un viejo truco matemático $L_t = L_t^{\alpha}.L_t^{\beta}$, donde $\alpha + \beta = 1$

$$\frac{Y_t}{L_t} = A.\frac{K_t^{3/5}}{L_t^{3/5}}.\frac{L_t^{2/5}}{L_t^{2/5}} \Longrightarrow \frac{Y_t}{L_t} = A\left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{3/5} \Rightarrow y_t = A.k_t^{3/5} \ldots (FPI)$$

Ahora deduciremos la ecuación de *Solow – Swan*

$$I_t = \dot{K}_t + \delta.K_t \qquad C_t = (1-s).F(K_t, L_t, A)$$

$$Y_t = C_t + I_t \Rightarrow F(K_t, L_t, A) = (1-s).F(K_t,.L_t, A) + \dot{K}_t + \delta.K_t$$

$$\dot{K}_t = F(K_t, A.L_t) - \delta.K_t ...x\frac{1}{L_t} \Longrightarrow \dot{k}_t = f(k_t) - \delta.k_t \ldots (I)$$

$$k_t = \frac{K_t}{L_t} \Longrightarrow \frac{dk_t}{dt} = \frac{\dot{K}_t.L_t - \dot{L}_t.K_t}{L_t^2} \Longrightarrow \dot{k}_t = \frac{\dot{K}_t}{L_t} - \frac{\dot{L}_t}{L_t}.\frac{K_t}{L_t} \Rightarrow \frac{dk_t}{dt} = \dot{k}_t - n.k_t \ldots (II)$$

Reemplazando la ecuación ($I$) en la ecuación ($II$)

$$\frac{dk_t}{dt} = (f(k_t) - \delta.k_t) - n.k_t \Longrightarrow \dot{k}_t = f(k_t) - (n+\delta).k_t \ldots (III)$$

La ecuación ($III$) representa la ecuación fundamental de *Solow – Swan* que hemos deducido por única vez, solo la mencionaremos y la aplicaremos de forma directa en las siguientes paginas del libro.

Reemplazado los datos en la ecuación fundamental de *Solow – Swan*.

$\dot{k}_t = (0.30).(1)k_t^{3/5} - (0.10)k_t$, la ecuación de fundamental de *Solow – Swan*.

b) Hallar el estado de crecimiento proporcionado.

Para el crecimiento proporcionado tenemos que: $\gamma_k = 0 \Rightarrow \dot{k}_t = 0$

Dividiendo la ecuación de fundamental de *Solow – Swan*, entre el capital por trabajador ($k_t$), tenemos:

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t} = (0.30).(1).\frac{1}{k_t^{2/5}} - 0.10 \Rightarrow \gamma_k = 0.30\left(\frac{1}{k_t^{2/5}}\right) - 0.10 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0.30\left(\frac{1}{k_t^{2/5}}\right) - 0.10$$

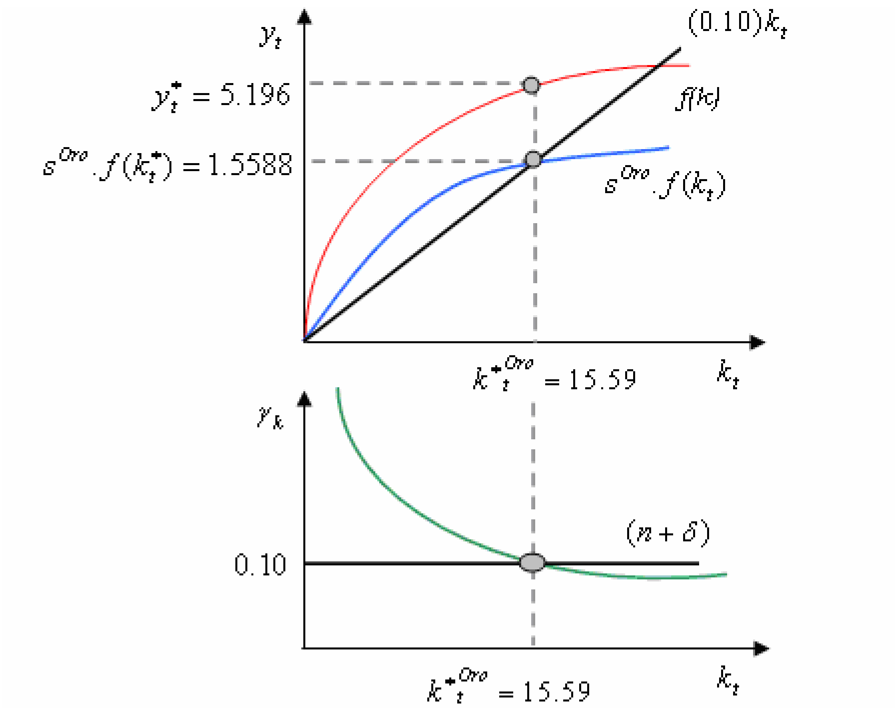
c) Hallar los valores de capital por trabajador y de producto por trabajador del estado proporcionado.

Despejando, $k_t$, de la ecuación anterior, tenemos $k_t^* = \left(\frac{0.30}{0.10}\right)^{5/2} \Rightarrow k^{*Oro}_t = 15.589$

Reemplazando, $k_t$, en la función de producción intensiva (FPI)

$$y_t^* = (15.589)^{3/5} \Rightarrow \quad y_t^* = 5.196 \qquad\qquad s^{Oro}.f(k_t^*) = 1.5588$$

**Gráfico del Problema #1**




d) Hallar la tasa de salario y de rendimiento bruto de capital y graficar los valores.

**Mercado de capital:**

$$PMgk = r \Rightarrow PMgk = \frac{d(k_t^{3/5})}{dk_t} = \frac{3}{515.589}.\left(\frac{1}{15.589}\right)^{2/5} \quad \Rightarrow \quad r = 0.1999972$$

**Mercado de trabajo:**

$$PMgL = W \Rightarrow PMgL = f(k_t) - f'(k_t).k_t \Rightarrow W = A.k_t^{3/5} - \frac{3}{5}.A.\frac{1}{k_t^{2/5}}.(k_t)$$

$$W = \frac{2}{5}.A.k_t^{2/5} \Rightarrow W = \frac{2}{5}.(1).(15.589)^{3/5} \Longrightarrow W = 2.079$$

e) Hallar la participación de los salarios y de los beneficios brutos en el ingreso nacional.

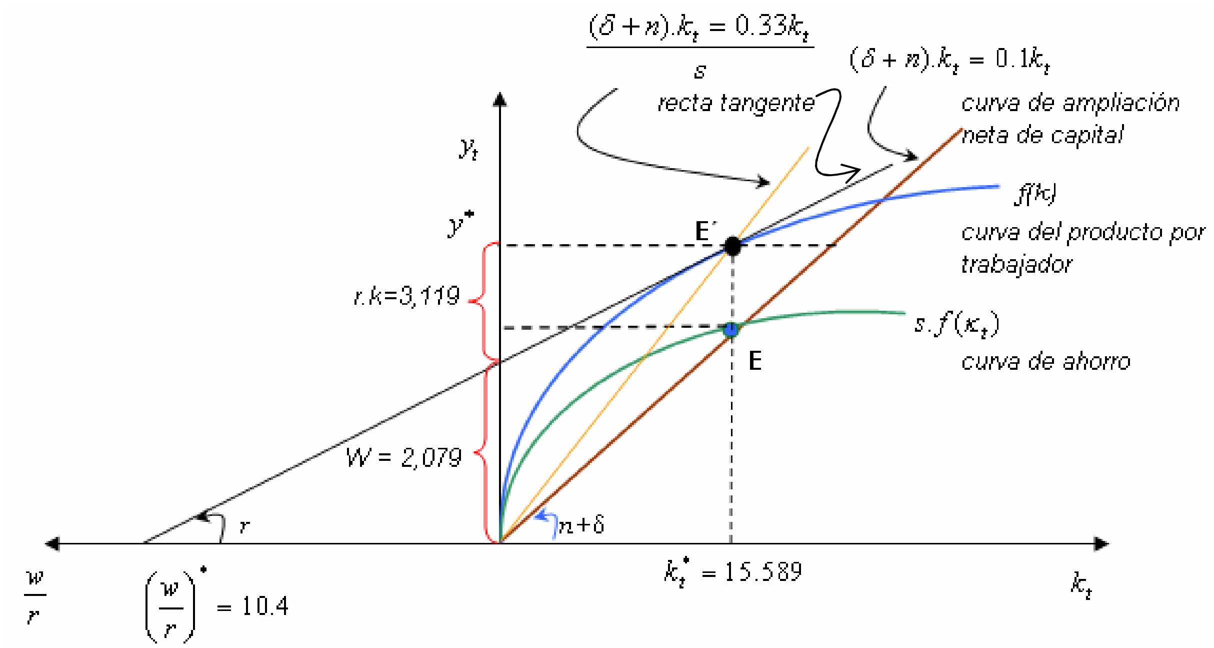
La participación del salario:

$\frac{w}{y} = \frac{W}{Y} = \frac{2.079}{5.196} = 0.40$ , La participación del salario en el ingreso nacionales del 40%.

La participación del beneficio:

$\frac{r.k}{y} = \frac{B}{Y} = \frac{(15.589)0.19999972}{5.196} = 0.6$ , la participación del beneficio en el ingreso nacional es del 60%.

**Gráfico de la distribución del ingreso nacional**




**Problema #2**
Analice el impacto de una reducción permanente de la tasa de depreciación del stock de capital sobre el crecimiento.

**Rpt:**

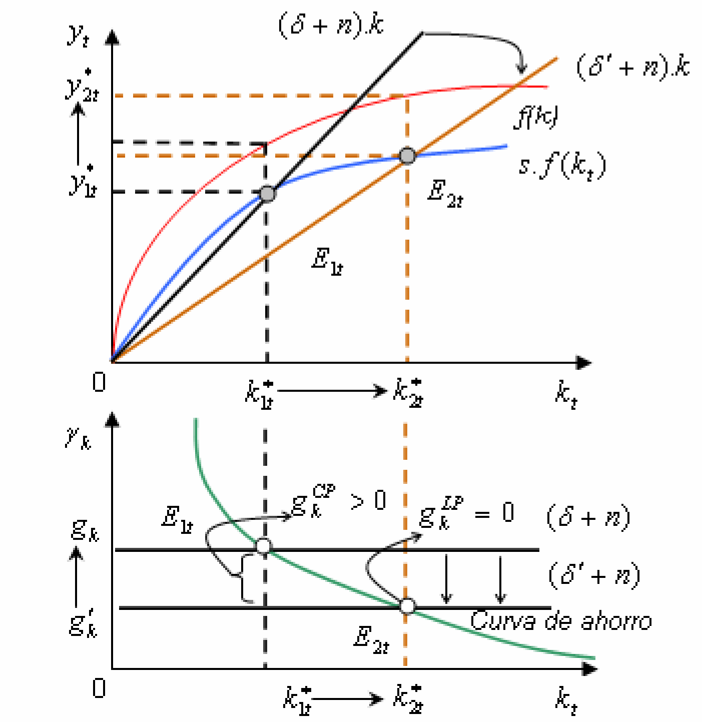
Cuando se produce una reducción del stock de capital, entonces la curva de ampliación del capital, comenzara a rotar en sentido horario, como se muestra en el Gráfico, de tal modo que cuando se intercepto a la curva de ampliación neta de capital, determina el nuevo estado de crecimiento proporcionado ($E_{2t}$), donde la tasa de crecimiento de largo plazo ($g_k^{LP} = 0$) es cero. En este punto existe mayor capital por trabajador ($k_{2t}^*$) y un producto por trabajador ($y_{2t}^*$) mayor que el inicial.

En el Gráfico posterior podemos apreciar la versión de *Barro*, donde la reducción de la depreciación se desplaza así abajo, y cuando llega a interceptarse con la curva de ahorro determina mayor capital por trabajador ($k_{2t}^*$) en equilibrio.

$\dot{k}_{2t} = s.f(k_{2t}) - (\delta + n).k_{2t}$ Si: $\dot{k}_{2t} = 0$

$s.f(k_{2t}) = (\delta + n).k_{2t} \Rightarrow \dfrac{d(f(k_{2t}))}{d\delta} = k_{2t}^* > 0$ Donde: $k_{1t}^* < k_{2t}^*$

**Gráfico del problema #2**




**Problema #3**

Suponga que existe una economía capitalista cuya función de producción agregada es $Y_t = A.K_t^{3/4}.L_t^{1/4}$, y se sabe que la tasa de ahorro de esta sociedad es de 35% del producto agregado cada año, también se sabe que; La tasa de depreciación del capital es de 10% al año, la tasa de crecimiento de la fuerza de trabajo es del 1% al año y por ultimo se sabe que el índice de nivel de tecnología es la unidad. Se pide:

a) Hallar la ecuación fundamental de *Solow – Swan*.
b) Hallar el estado de crecimiento proporcionado.
c) Hallar los valores de capital por trabajador y de producto por trabajador del estado proporcionado.
d) Hallar la tasa de salario y la tasa de rendimientos bruto del capital y graficar los valores.
e) Hallar la participación de los salarios y de los beneficios brutos en el ingreso nacional.

**Rpt:**

a) Hallar la ecuación fundamental de *Solow – Swan*.

De los datos tenemos: $s = 0.35$, $\delta = 0.10$, $n = 0.01$ $A = 1$

$Y_t = A.K_t^{3/4}.L_t^{1/4}$, dividiendo la función de producción entre la cantidad de trabajadores ($L_t$) tenemos:

Para operar con facilidad usaremos un viejo truco matemático $L_t = L_t^{\alpha}.L_t^{\beta}$, donde $\alpha + \beta = 1$

$$\frac{Y_t}{L_t} = A.\frac{K_t^{3/4}}{L_t^{3/4}}.\frac{L_t^{1/4}}{L_t^{1/4}} \Longrightarrow \frac{Y_t}{L_t} = A\left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{3/4} \Rightarrow y_t = A.k_t^{3/4} \ldots (FPI)$$

Reemplazado los datos en la ecuación fundamental de *Solow – Swan*.

$\dot{k}_t = (0.35).(1)k_t^{3/4} - (0.11)k_t$, la ecuación de fundamental de *Solow – Swan*.

b) Hallar el estado de crecimiento proporcionado.

Para el crecimiento proporcionado tenemos que: $\gamma_k = 0 \Rightarrow \dot{k}_t = 0$

Dividiendo la ecuación de fundamental de *Solow – Swan*, entre el capital por trabajador ($k_t$), tenemos:

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t} = (0.35).(1).\frac{1}{k_t^{1/4}} - 0.11 \Rightarrow \gamma_k = 0.35\left(\frac{1}{k_t^{1/4}}\right) - 0.11 \Longrightarrow 0 = 0.35\left(\frac{1}{k_t^{1/4}}\right) - 0.11$$

c) Hallar los valores de capital por trabajador y de producto por trabajador del estado proporcionado.

Despejando, $k_t$, de la ecuación anterior, tenemos $k_t^* = \left(\frac{0.35}{0.11}\right)^4 \Rightarrow k^*_t = 102.5$

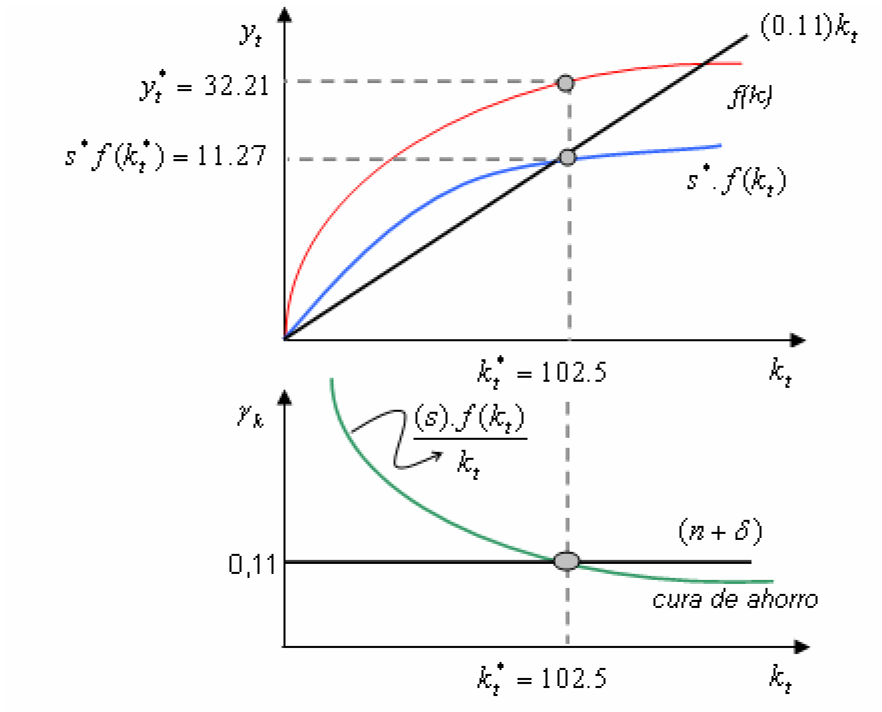
Reemplazando, $k_t$, en la función de producción intensiva (FPI)

$$y_t^* = (1).(102.5)^{3/4} \Rightarrow y_t^* = 32.21 \qquad s^*.f(k_t^*) = 11.27$$



Ejercicios de Crecimiento Económico

**Gráfico del Problema #3**




d) Hallar la tasa de salario y de rendimiento bruto de capital y graficar los valores.

**Mercado de capital:**

$$PMgk = r \Rightarrow PMgk = \frac{d(k_t^{3/4})}{dk_t} = \frac{3}{4}.\left(\frac{1}{102.5}\right)^{1/4} \quad \Rightarrow \quad r = 0.2357112$$

**Mercado de trabajo:**

$$PMgL = W \Rightarrow PMgL = f(k_t) - f'(k_t).k_t \Rightarrow W = A.k_t^{3/4} - \frac{3}{4}.A.\frac{1}{k_t^{1/4}}.(k_t)$$

$$W = \frac{1}{4}.A.k_t^{2/4} \Rightarrow W = \frac{1}{4}.(1).(102.5)^{3/4} \quad \Rightarrow \quad W = 8.05347$$

e) Hallar la participación de los salarios y de los beneficios brutos en el ingreso nacional.

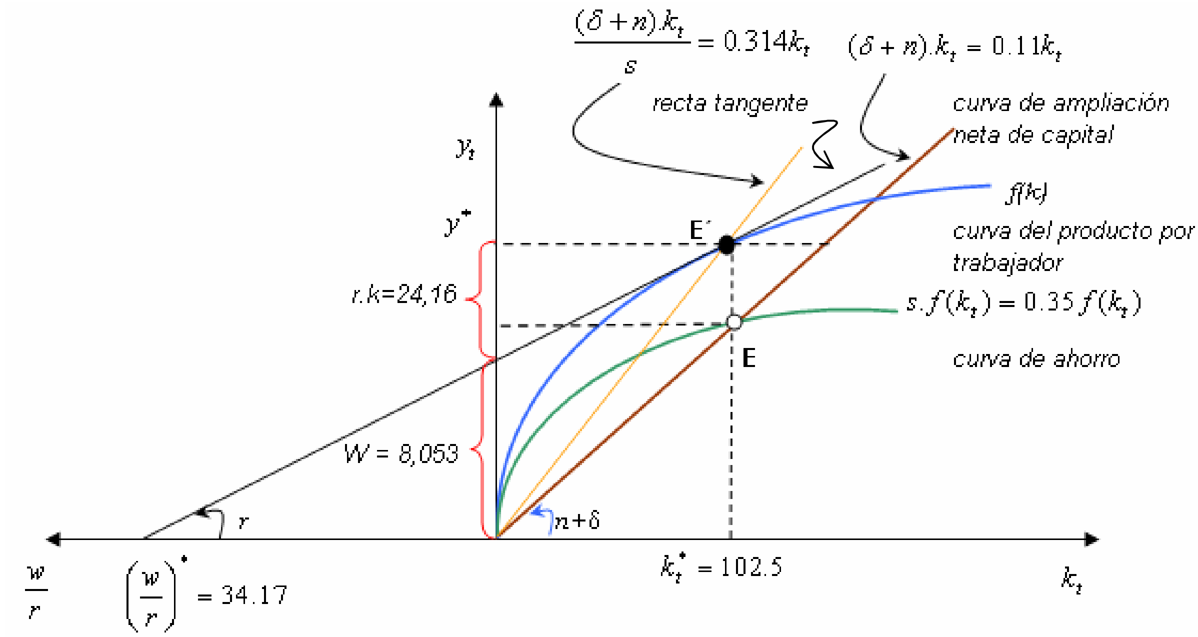
La participación del salario:

$\frac{w}{y} = \frac{W}{Y} = \frac{8.05347}{32.21} = 0.25$, La participación del salario en el ingreso nacionales del 25%.

La participación del beneficio:

$\frac{r.k}{y} = \frac{B}{Y} = \frac{(102.5)0.2357112}{32.21} = 0.75$, la participación del beneficio en el ingreso nacional es del 75%.

### Gráfico de la distribución del ingreso nacional

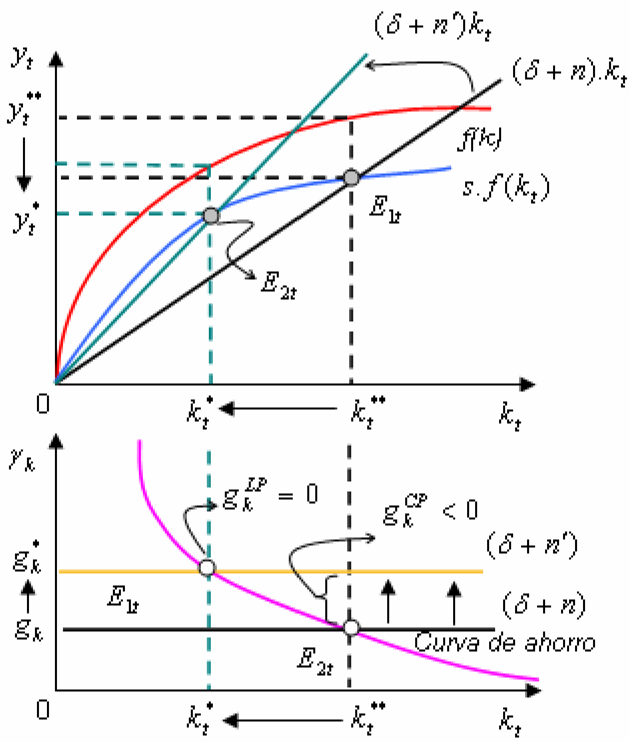



**Problema #4**
Imaginemos que China en la década de los 80 experimentos un incremento de su población, considerablemente, y debido a estos se quiere analizar este incremento permanente de la tasa de crecimiento de la población, sobre el crecimiento de su economía.

**Rpt:**

Con el aumento permanente de la tasa se crecimiento de la población ($n'$), la curva de ampliación de capital rota en sentido antihorario, de tal modo que cuando se intercepto con la curva de ampliación neta de capital determina el nuevo estado de crecimiento proporcionado, con mayor capital ($k_t^*$) y con mayor producto por trabajador ($y_t^*$).

### Gráfico del problema #4



En la versión de *Barro* que se muestra en la parte inferior de nuestro Gráfico presentado, podemos apreciar, que el aumento de la tasa de crecimiento de la población hace que la curva de depreciación se desplace así arriba y al interceptarse con la curva de ahorro genere el nuevo punto de equilibrio ($E_{2t}$). En este punto existe un menor capital por trabajador.

Nótese que este mismo aumento de la tasa de crecimiento potencial de la economía.

$$g_{Potencial\_LP} = n + tasa\_progreso\_tecnológico$$

Si $n \uparrow \rightarrow g_{Potencial} \uparrow$

## 2.5 *Modelo de Crecimiento de Uzawa*

El economista japonés Hirofumi Uzawa crea un modelo de crecimiento de dos sectores que propuso[25].

### 2.5.1 Supuestos del modelo

- ✓ Sea una economía capitalista sin relación con el exterior.
- ✓ Dicha economía solo produce dos bienes: • Bienes de consumo con un subíndice ($c_t$)
  • Bienes de capital con un subíndice (m)
- ✓ Habrán dos sectores productivos: • Sector de bienes de consumo.
  • Sector de bienes de capital.
- ✓ Cada sector produce con una función de producción Neoclásica.
- ✓ El sector de bienes de consumo es mas intensivo que el sector de bienes de capital.
- ✓ Los mercados de bienes y factores son mercados de competencia perfecta.
- ✓ Los trabajadores no ahorran $PMg(s_w) = 0$.
- ✓ Los capitalistas ahorran todo su beneficio $PMg(s_k) = 1$.
- ✓ La fuerza de trabajo crece a una tasa constante ($n$).

Nótese que todo modelo de crecimiento de dos bienes por su propia naturaleza es más complejo que el modelo de *Solow*. Ciertamente habrá precios relativos de los bienes, de los factores de capital por trabajador sectorial, etc.

Este modelo de equilibrio general de dos bienes es un modelo reducido. Obsérvese que *Uzawa,* simplifica el análisis con lo cual, los trabajadores no ahorran todo.

[25] El titulo de su trabajo se llamo "On a Two-Sector Model of Economic Growth, I"(En Modelo de Dos-sector de Crecimiento Económico, yo), 1961, RES.

### 2.5.2 Sector de bienes de consumo

Se produce una función de producción Neoclásica de bienes de consumo.

$$Y_c = F(K_c, L_c)$$

Dividiendo la función entre $L_C$, tenemos:

$$\frac{Y_c}{L_c} = F\left(\frac{K_c}{L_c}, \frac{L_c}{L_c}\right) \Rightarrow y_c = f(k_c) \text{…Función de producción intensiva}$$

El producto del sector de bienes de consumo, $Y_c$, es igual al consumo real de bienes de consumo: $Y_c = \frac{c}{P_c}$.

Donde;

$c$: Consumo nominal de bienes de consumo.

$P_c$: Precio del bien de consumo.

$\frac{c}{P_c}$: Consumo real de bienes de consumo.

### 2.5.3 El sector de bienes de capital

Se produce una función de producción Neoclásica de buen comportamiento.

$$Y_m = F(K_m, L_m)$$

Dividiendo entre $L_m$, tenemos:

$$\frac{Y_m}{L_m} = F\left(\frac{K_m}{L_m}, \frac{L_m}{L_m}\right) \Rightarrow y_m = f(k_m) \text{…Función de producción intensiva}$$

Donde;

$I$ : Inversión nominal.

$P_m$: Precio de bien de capital.

$\frac{I}{P_m}$: Inversión real de bienes de capital.

Subíndice: $m$ representa el bien de capital (maquinaria).

El producto del sector de bienes de capital $Y_m$, es igual a la inversión real de bienes de capital: $Y_m = \frac{I}{P_m}$.

### El equilibrio en el crecimiento proporcionado

Se asume que se llega al estado de crecimiento proporcionado, los mercados de factores van estar en equilibrio.

### Mercado de trabajo

Se plantea que existe el sector de mercado de consumo y el mercado de bienes de capital.

**a. Mercado de trabajo del sector de bienes de consumo**
Que las empresas capitalistas van a contratar trabajadores en aquella cantidad, donde el salario real se iguale al salario nominal.

**b. Mercado de trabajo del sector de capital**
Las empresas capitalistas contratan trabajadores hasta, que la cantidad de salario nominal de consumo se iguales al salario de bienes de capital.

### Mercado de capital

**a. Mercado de capital en el sector de bienes de consumo**
Las empresas maximizadotas de beneficios contratan maquinas, hasta que esta se iguale con la tasa de rendimiento real.

$$PMgK_c = \frac{r_c}{P_c}$$

**b. Mercado de capital de bienes de capital**
Se asume que el nivel de tasas de rendimiento nominal del capital, $r_C = r_m = r$ y también se asume el pleno uso de los factores, $L_c + L_m = \overline{L}$ y $K_c + K_m = \overline{K}$, donde:

$$PMK_m = \frac{r_m}{P_m}$$

$\frac{r_c}{P_c}$: Tasa de rendimiento real del capital en términos de bienes de consumo.

$\frac{r_m}{P_m}$: Tasa de rendimiento real del capital en términos de bienes de capital.

### 2.5.4 Ecuación fundamental de *Uzawa*

Partiendo de la condición de equilibrio macroeconómico, tenemos:

$$S^{real} \equiv I^{real} \Rightarrow \frac{S}{P_m} = \frac{I}{P_m}$$

Asume todos los capitalistas ahorran todo su beneficio.

$$\frac{S}{P_m} = s_K \cdot \frac{B}{P_m} \qquad \text{donde: } s_K = PmgK_{capital} = 1$$

Reemplazando el valor que tenemos $s_K$.

$$\frac{S}{P_m} = \frac{B}{P_m} \Rightarrow \frac{S}{P_m} = \frac{r}{P_m}.K$$

Reemplazando $\frac{r}{P_m}.K = \frac{I}{P_m} \ldots (I)$

Dividiendo a la ecuación ($I$) entre $L$, tenemos:

$$\frac{r}{P_m}.\frac{K}{L}=\frac{I}{P_m}.\frac{1}{L}\cdots(II)$$

Recordando que la inversión neta por trabajador esta definida como: $\frac{I^n}{L}=\dot{k}_t+n.\dot{k}_t$, reemplazando la inversión neta en la ecuación ($II$).

$$\frac{r}{P_m}.k_t=\dot{k}_t+n.k_t\ldots(III)$$

De la función de producción intensiva de $\frac{\partial y_m}{\partial k_m}=f_m'(\bullet)=PMK_m=\frac{r_m}{P_m}$

Reemplazando en la ecuación ($III$), tenemos:

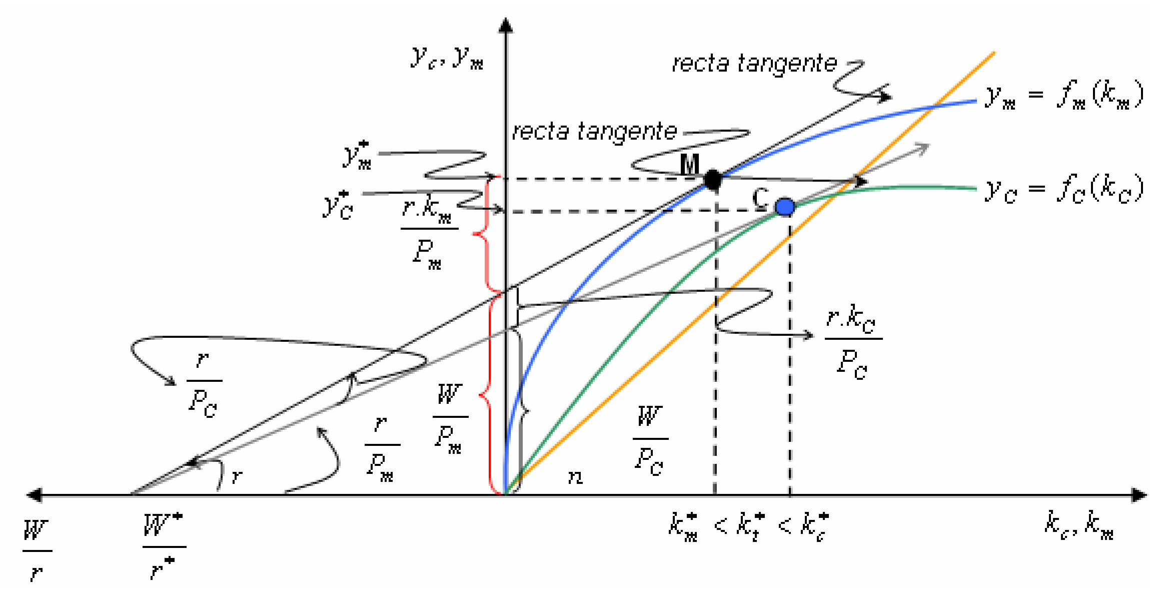
$$\dot{k}_t=f_m'.k_t-n.k_t$$ , la ecuación fundamental de *Uzawa*

Esta ecuación diferencial del proceso de acumulación en una economía capitalista de dos bienes. Va significar que la tasa de cambio del capital por trabajador es un remanente del producto marginal del capital del sector de maquinas, respecto a la ampliación de capital.

### 2.5.5 Estado de crecimiento proporcionado

En el estado de crecimiento proporcionado, la tasa de crecimiento del capital ($g_k$) es nula, entonces si $g_k=0$, esto nos da: $f_m'=n$, que determina $k^*{}_m$.

**Gráfica 2.17: Distribución del ingreso del modelo de *Uzawa***




En el Gráfico [2.17] se puede apreciar la distribución del ingreso entre el sector de bienes capitalista y el sector de bienes de consumo, donde la función de producción de bienes de capital, es más intensiva que la función intensiva de bienes de consumo.

Nótese:

$k_m^* < k_t^* < k_c^*$

$k_t^* = \theta.k_m^* + (1-\theta).k_c^* \qquad\qquad i = c, m$

Donde:

$k_i^*$ : Capital por trabajador del sector i-ésimo.

$y_i^*$ : Producto por trabajador del i-ésimo sector.

$P_i$ : Precio del bien i-ésimo.

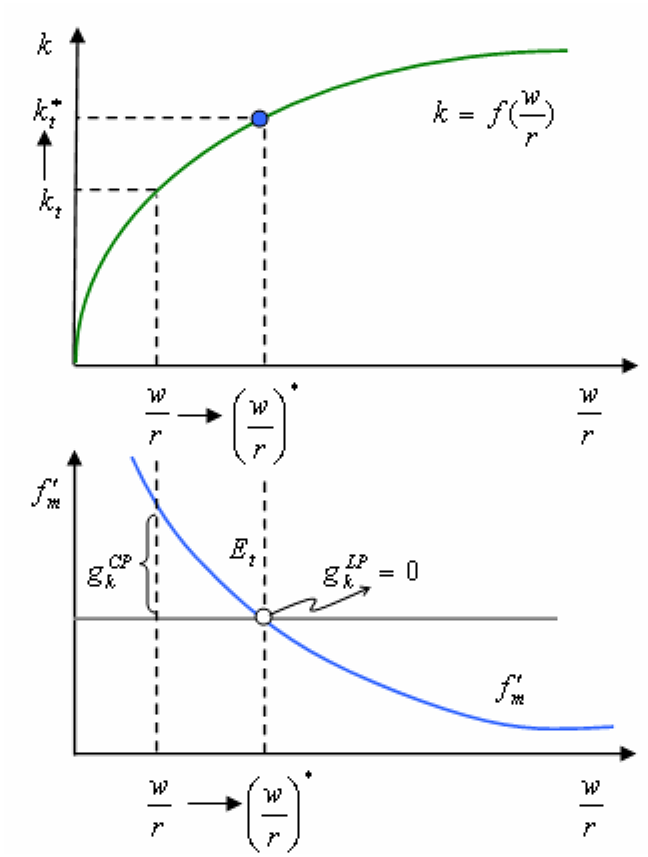
$\frac{W}{P_i}$ : Salario real del bien i-ésimo.

$\frac{r}{P_i}$ : Tasa de rendimiento real del capital en términos del bien i-ésimo.

$\frac{w}{r}$ : Precio relativo de los factores.

$\frac{P_c}{P_m}$ : Precio relativo de los bienes.

**Gráfica 2.18: Estado de crecimiento proporcionado de *Uzawa***




Dividiendo la ecuación fundamental de *Uzawa* entre $k_t$, tenemos:

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t} = f'_m - n \quad \Rightarrow \quad g_k = f'_m - n$$



Ejercicios de Crecimiento Económico

## 2.6 *Modelo de Kaldor (Enfoque de Cambridge)*

La historia de las leyes de Kaldor se remonta a los debates sobre las consecuencias de los rendimientos crecientes dinámicos y estáticos y sobre el papel de la demanda real en la determinación de la trayectoria de crecimiento de largo plazo de la economía.

Podríamos decir que los trabajos que Kaldor publicó después de 1966 constituyen una especie de reversión de la técnica analítica. En primer lugar, descarta el método de equilibrio por irrelevante, pues el desarrollo económico es ante todo un proceso de desequilibrio. En segundo lugar, complementa el enfoque de la oferta con el de la demanda, y hace de ésta una fuerza esencial en la determinación del ritmo de crecimiento de la economía en el corto y en el largo plazo. Por último, opta por un análisis cualitativo antes que cuantitativo, ya que privilegia el enunciado de leyes empíricas y busca explicaciones endógenas y bicausales de los hechos estilizados, relegando la determinación de los valores de las variables a un lugar secundario.

Desde esta perspectiva analítica, lo importante es identificar los mecanismos de transmisión en los procesos de cambio estructural de las economías capitalistas. La explicación del desarrollo y del surgimiento y persistencia de polos de crecimiento y estancamiento exigía dejar de lado los modelos de un sector, y utilizar esquemas multisectoriales para estudiar las interrelaciones entre los sectores con rendimientos decrecientes (la agricultura) y con rendimientos crecientes (la industria.

Kaldor (1970 y 1981) examinó a fondo las implicaciones del principio de causación circular acumulativa y de los rendimientos crecientes en el desarrollo regional y en el comercio internacional. Distinguió entre actividades económicas basadas en la tierra y actividades basadas en procesos de transformación. En las primeras, los precios relativos constituyen el mecanismo de ajuste a los desequilibrios, mediante los efectos ingreso y sustitución. En las actividades industriales, el proceso opera de manera diferente Kaldor llegó incluso a afirmar que el libre comercio podía dejar al mundo en una situación peor que si hubiese algún tipo de regulación. Los hechos confirmaban su hipótesis. El comercio internacional entre países ricos se basaba en el intercambio dentro de las industrias y no entre industrias, lo que reafirmaba la idea clásica de que las fuerzas que llevan a la especialización son el comercio basado en bajos salarios (bienes primarios) y el comercio basado en conocimiento y tecnología (bienes industriales). Un país exitoso es aquel que exporta bienes con altas elasticidades ingreso de la demanda e importa bienes primarios con bajas elasticidades. Las exportaciones se convierten en el componente autónomo más importante del gasto en las economías desarrolladas porque les permite mantener altos niveles de utilización de la capacidad productiva en las manufacturas. [26]

El resultado más importante del desarrollo del modelo de crecimiento y distribución de la renta de *Kaldor* es el llamado "*teorema de Cambridge*", el cual establece que la tasa de beneficios ($r$) en la senda de crecimiento a largo plazo de una economía, es el cociente entre la tasa natural de crecimiento ($g_n$) y la (pura) propensión al ahorro de los capitalistas ($s_c$) [27].

Este es un modelos Neokeynesianos, donde *Kaldor* efectúa una critica a los modelos Neoclásicos de crecimiento indicando que no se ciñen a los hechos esterilizados de

---

[26] Álvaro Martín Moreno Rivas (2008 )Las leyes del desarrollo económico endógeno de kaldor: el caso colombiano

[27] Título original: "The government sector in Kaldor-Pasinetti models of growth and income distribution" (El sector gubernamental en Kaldor-Pasinetti planea de crecimiento y distribución del ingreso) *Journal of Post Keynesian Economics (*El periódico de Post la Economía Keynesiana*)*, vol. 15, N. 2, pag: 211-228.

crecimiento, frente a lo cual, plantea un modelo de crecimiento que considere las clases sociales, distribución del ingreso y la tasa de ahorro de la sociedad en forma endógena.

### 2.6.1 Supuestos del modelo

- ✓ Sea una economía capitalista en el cual existen dos clases sociales:
- Capitalista con un subíndice (c).
- Trabajadores con un subíndice (w).
- ✓ Dicha economía se halla en pleno empleo.
- ✓ La inversión no es exógena.
- ✓ Cada clase social tiene su propio ahorro que depende de su ingreso, su producto marginal ($PMgs$) de cada clase.
- ✓ El producto marginal de los capitalistas supera al producto marginal de los trabajadores esto puede ser escrito mejor como: $0 < s_w < s_c < 1$.
- ✓ La economía no tiene relación con el exterior.

### Desarrollo del modelo

**(a) Identidades**

El producto por el lado del ingreso es igual a la suma de la masa de salario y la masa de beneficio.

$$Y \equiv W + B$$

Su producto agregado es igual al ingreso nacional.
El ahorro agregado, S, se desdobla entre el ahorro de los capitalistas ($s_c$) y el ahorro de los trabajadores ($s_w$).

$$S \equiv s_w + s_c$$

**(b) Ecuación de comportamiento**

El ahorro de los capitalistas ($s_c$), depende directamente de su ingreso de los beneficios dado su producto marginal ahorrar de los capitalistas ($PMgs_c$), donde; $PMgs_c = 1$.

$$S_c = s_c.B \qquad\qquad 0 < s_c < 1$$

El ahorro de los trabajadores ($s_w$) depende directamente de su ingreso laboral, masa de salario w, dado su producto marginal ahorrar ($PMgs_w$) de los trabajadores.

$$S_w = s_w.W \qquad\qquad 0 < s_w < 1$$

### Ecuación de ahorro de *Kaldor*

Plantea que el ahorro agregado va depender directamente del ingreso nacional y de los beneficios dado el producto marginal ahorrar ($PMgs$) de las clases sociales.

De la identidad $Y \equiv W + B \Rightarrow W = Y - B$, reempezando en la siguiente ecuación que se muestra

$$S = S_c + S_w$$

$$S = s_c.B + s_w.W$$
$$S = s_c.B + s_w.(Y - B)$$
$$S = s_w.Y + (s_c - s_w).B$$

**Tasa de ahorro de la sociedad**

$$S = s_w.Y + (s_c - s_w).B$$

Dividiendo la ecuación anterior entre *Y*, tenemos.

$$\frac{S}{Y} = s_w + (s_c - s_w).\frac{B}{Y}$$
$$s = s_w + (s_c - s_w).\frac{B}{K}.\frac{K}{Y}$$
$$s = s_w + (s_c - s_w).r.v$$

$$s = f(r) \qquad \text{Dado } s_w, s_c, r$$

## 2.6.2 Ecuación de beneficios

De la condición de equilibrio macroeconómico tenemos;

$$S = I$$
$$s_w.Y + (s_c - s_w).B = I$$

$$B = \frac{1}{s_c - s_w}.\left(I - s_w.Y\right), \text{ Ecuación de beneficio}$$

**Participación de los beneficios en el ingreso nacional**

De la ecuación de beneficio tenemos;

$$B = \frac{1}{s_c - s_w}.\left(I - s_w.Y\right)\ldots(I)$$

Dividiendo entre *Y:*

$$\frac{B}{Y} = \frac{1}{s_c - s_w}.\left(\frac{I}{Y} - s_w\right)\ldots(II)$$

Esto significa que depende directamente del coeficiente de inversión dado las diversas propensiones marginales ahorrar.

**Tasa de beneficio**

De la ecuación ( $I$ ), tenemos;

$$B = \frac{1}{s_c - s_w}.\left(I - s_w.Y\right)$$

Dividiendo entre *K*

$$\frac{B}{K} = \frac{1}{s_c - s_w}.\left(\frac{I}{K} - s_w.\frac{Y}{K}\right)\ldots(III)$$

Estos significan que la tasa de beneficios de la sociedad depende directamente de la tasa de crecimiento de capital, dad la tecnología y las proporciones marginales ahorrar.

Donde:

$\frac{B}{K} = r$ : Tasa de beneficio.

$\frac{I}{K} = g_k = \frac{\Delta K}{K}$ : Tasa de crecimiento del stock de capital

$\frac{Y}{K} = \sigma$ : Relación producto-capital.

Es una teoría de la distribución que señala que las clases sociales y se basa en su producto marginal que lo genera.

### 2.6.3 Crecimiento Económico

De la condición de equilibrio macroeconómico tenemos:

$$S = I$$
$$s_w.Y + (s_c - s_w).B = I$$

Dividiendo entre el stock de capital la ecuación anterior, tenemos:

$$s_w.\underbrace{\frac{Y}{K}} + (s_c - s_w).\frac{B}{K} = \frac{I}{K}$$

$$s_w.\sigma. + (s_c - s_w).\frac{B}{K} = \frac{I}{K}$$

$\sigma$ : Relación producto-capital y es el reciproco de la relación capital-producto $\sigma = 1/v$.

$$s_w.\sigma. + (s_c - s_w).r = g_K$$

$$g_K = \frac{s_w + (s_c - s_w).r.v}{v} \ldots (IV)$$

Nótese que el numerador de la ecuación ($IV$) es la tasa de ahorro de la sociedad ($s_r$).

$g_K = \frac{s(r)}{v}$ $\quad$ $s(r)$ : Es endógeno.

En el crecimiento proporcionado: $g_K = g_Y$

$$g_Y = \frac{s(r)}{v}$$

Nótese, Que *Kaldor* halla que la tasa de crecimiento del producto es igual a la tasa de ahorro de la sociedad es endógena y permite que se igualen a la tas de crecimiento efectivo.

$$g_w = g_e$$

Es un modelo donde hay una tasa de ahorro de la sociedad es endógena.

Ejercicios de Crecimiento Económico

### 2.6.4 Caso Límite

En este caso nos dice que la economía capitalista en la cual los trabajadores no ahorran, esto significa que $PMgs_{trab} = s_w = 0$, trabajadores no ahorran de la ecuación de beneficio ($I$), reemplazando $s_w = 0$ tenemos:

$$B = \frac{I}{s_c} \ldots (I')$$

En una economía capitalista donde los trabajadores no ahorran, los beneficios dependen del volumen de inversión dado el producto marginal de los capitalistas.

- *Kalecki*: Señala que los capitalistas guardan todo lo que gana y los trabajadores gastas todo lo que ganan, esto quiere decir que $s_w = 0$.

De la ecuación de beneficio ($II$), tenemos:

$$\frac{B}{Y} = \frac{1}{s_c}.\left(\frac{I}{Y}\right) \ldots (II')$$

En una economía en que los trabajadores no ahorran su beneficio depende directamente del coeficiente de inversión dado su propensión marginal.
De la ecuación de beneficio deviene:

$$\underbrace{\frac{B}{K}} = \frac{1}{s_c}.\frac{I}{K}$$

$$r = \frac{g_k}{s_c} \ldots (III')$$

En una economía capitalista en los que los trabajadores no ahorran, la tasa de beneficio depende directamente del stock de capital, dado la propensión marginal de los capitalistas.

- **Ecuación de crecimiento**

De la ecuación numero ($IV$), tenemos la ecuación de crecimiento, donde deviene:

$$g_K = g_Y = \frac{s_c . r_Y}{v} \ldots (VI')$$

$g_Y = s_c . r$ **,** *Ecuación de crecimiento Cambridge* [28].

La economía capitalista en el largo plazo, cuando los trabajadores no ahorran la tasa de crecimiento del producto depende directamente de la tasa de beneficio, dado el producto marginal ahorrar de los capitalistas ($PMgs_c$).

### 2.6.5 Tres leyes de crecimiento de kaldor

En primer lugar, mostró la importancia de los análisis desagregados y multisectoriales para explicar las diferencias de crecimiento per cápita entre países. En segundo lugar, propuso una explicación imaginativa y general para explicar el bajo desempeño económico de Inglaterra después de la posguerra. Aunque luego modificó algunas de sus hipótesis, mantuvo la formulación de las tres leyes del crecimiento endógeno a pesar de las agudas controversias posteriores a su enunciado conjunto de 1966. Como dijo en su artículo de ese año: "la hipótesis que intento examinar es que las rápidas tasas de crecimiento económico están asociadas con tasas rápidas de crecimiento del sector secundario de la economía

[28] El teorema de Cambridge fue primero atacado principalmente por escritores como *Meade* (1963, 1966), *Meade* y *Hahn* (1965) y *Samuelson* y *Modigliani* (1966) que trataron de desarrollar un "teorema dual" o "anti – *Pasinetti*", abandonando el supuesto que contiene el $0 < s_w < s_c < 1$. En breve, el "teorema dual" dice que el ratio producto-capital (*Y/K*) en la senda de crecimiento equilibrado es igual al cociente de la tasa

principalmente el sector de las manufacturas y que esto es un atributo de una etapa intermedia del desarrollo económico: es la característica de la transición de la ‘inmadurez’ a la madurez” (Kaldor, 1966)

*Kaldor* nos dice en su libro “Causa de crecimiento de de UK” (1966), nos da las tres “leyes” del crecimiento de Kaldor. En su planteamiento, Kaldor hace referencia a los efectos sobre el resto de la economía de una expansión en el sector manufacturero dice:

## PRIMERA LEY DE KALDOR

Existe una fuerte relación de causalidad que va del crecimiento del producto manufacturero al crecimiento del PIB.

Formalmente, se puede expresar así:

$$g_Y = c + dg_m$$

$$g_Y = c + z(g_m - g_{nm})$$

Donde
$g_Y$: Representa la tasa de crecimiento del PIB.
$g_m$: Representa la tasa de crecimiento industrial.
$g_{nm}$: Representa la tasa de crecimiento no manufacturero.
$z(g_m - g_{nm})$: Esta expresión busca reducir los efectos espurios, por eso se expresa en función de la diferencia entre las tasas de crecimiento industrial $g_m$ y de crecimiento no manufacturero $g_{nm}$.

Kaldor consideraba que la correlación era significativa y que no podía atribuir al simple hecho de que la producción industrial hace parte del PIB. Propuso dos razones para apoyar esta ley: la reasignación de recursos subutilizados en el sector primario o de servicios, donde había desempleo disfrazado o subempleo y menor productividad, lo que permitía aumentar la producción sin reducir la oferta de los demás sectores; y la existencia de rendimientos crecientes a escala estáticos y dinámicos en la industria manufacturera. Los primeros hacen referencia al tamaño óptimo de la empresa (producción a gran escala); los segundos, a los procesos de aprendizaje en el oficio y a las economías externas producto de la especialización industrial. Estos últimos son esenciales, pues su carácter macroeconómico convierte al sector industrial en motor del crecimiento.

## SEGUNDA LEY DE KALDOR

Existe una fuerte relación positiva entre el crecimiento de la productividad en la industria manufacturera y la tasa de crecimiento del producto.

Existen varias maneras de expresar esta ley. Aquí usamos las dos expresiones de Kaldor (1966).

$$P_m = \alpha + \beta . g_m \qquad s.a: \quad 0 < \beta < 1$$
$$e_m = -\alpha + (1 - \beta) g_m$$

Donde
$P_m$: Representa el crecimiento de la productividad del trabajo.

$e_m$ : Representa la tasa de crecimiento del empleo en la industria.
$g_m$ : Representa la tasa de crecimiento del PIB industrial.

Esta relación también se conoce como “*ley de Verdoorn*” (1948). Un coeficiente menor que 1 indica rendimientos crecientes a escala. El punto controversial es la relación de causalidad. Algunos autores sostienen que va en sentido contrario, es decir, del crecimiento de la productividad al crecimiento del producto industrial, y aluden a la importancia de la brecha tecnológica en la explicación de la productividad (*Gomulca*, 1983).

**TERCERA LEY DE KALDOR**

Cuanto más rápido es el crecimiento del producto manufacturero más rápida es la tasa de transferencia de trabajo de los sectores no manufactureros a la industria, de modo que el crecimiento de la productividad total de la economía está asociado positivamente con el crecimiento del producto y del empleo industrial y correlacionado negativamente con el crecimiento del empleo fuera del sector manufacturero.

Formalmente, se puede expresar como:

$$P_{tot} = c + kg_m - je_{nm}$$

Donde
$P_{tot}$ : Representa la tasa de crecimiento de la productividad total.
$g_m$ : Representa la tasa de crecimiento del PIB industrial.
$e_{nm}$ : Representa la tasa de crecimiento del empleo en los sectores no manufactureros

- *Kaldor* analiza las causas de las diversas causas de crecimiento del producto manufacturero.
- Factor por el lado de la demanda $\left\{ \begin{array}{l} \text{I (inversión)} \\ \text{C (consumo)} \\ \text{X (exportaciones)} \end{array} \right.$
- Factor por el lado de la oferta { Dotación de factores: capital (K), trabajo (L) y tecnología (T).

## 2.7 *Modelo de Pasinetti*

En su trabajo de 1962, va ser un balance del modelo de *Kaldor* donde hay aciertos y definiciones. En los aciertos señala que hay clases sociales y el producto marginal ahorrar ($PMgs$) es endógeno y en las diferencias descubre, que hay una limitación en una economía capitalista, donde los propietarios del ahorro son dueños del interés (el ahorro de los trabajadores genera interés), que pertenece a los trabajadores[29].

Concluye que existen beneficios de los trabajadores y capitalistas, por eso su finalidad es corregir el modelo de *Kaldor.*

[29] La tasa de crecimiento del producto ($g_y$) dividida por la propensión al ahorro de los trabajadores ($s_w$), esto es: $Y/K = g_Y / s_w$.

### 2.7.1 Supuestos del modelo

A los supuestos de *Kaldor Pasinetti* le añade los siguientes supuestos:

- ✓ El ahorro de los trabajadores genera un interés que pertenece a los trabajadores.
- ✓ Existen beneficio de los capitalistas y beneficios de los trabajadores.
- ✓ La economía considerada es cerrada, sin actividad gubernamental, y en la senda de crecimiento equilibrado con pleno empleo a largo plazo.
- ✓ La cuantía de la inversión (*I*), dad exógenamente, esta fijada al nivel necesario para asegurar el pleno empleo en el equilibrio a largo plazo.
- ✓ La fuerza de trabajo medida en unidades de eficiencia (*L*) crece de forma exponencial a la tasa de crecimiento natural de Harrod.
- ✓ Los ingresos netos totales (*Y*) se dividen en salarios (*W*), beneficios asignados a los trabajadores ($P_w$) y beneficios asignados a los capitalistas ($P_c$). Del mismo modo el ahorro total neto (S) se divide entre el ahorro de los trabajadores ($s_w$) y el de los capitalistas ($s_c$), y el capital total (*K*) es, en parte, propiedad de los trabajadores ($K_w$) y en parte de los capitalistas ($K_c$). Adicionalmente, $0 \leq s_w < s_c \leq 1$.

- El ahorro agregado de la sociedad se desdobla, en ahorro de los capitalistas ($s_c$) y ahorro de los trabajadores ($s_w$).

$$S \equiv S_c + S_w$$

- El beneficio total se desdobla en beneficio de los capitalistas ($B_c$) y beneficio de los trabajadores ($B_w$).

$$B \equiv B_c + B_w$$

- El producto agregado por el lado del ingreso, se desdobla en masa de salario ($W$), y masa de beneficio ($B$).
- El ingreso de los trabajadores se desdobla en masa de salario ($W$), y beneficio de los trabajadores ($B_w$).

$$Y \equiv W + B_w$$

Donde:

El subíndice (*c*) representa a los capitalitas.

El subíndice (*w*) representa a los trabajadores.

#### Ecuación de comportamiento

- El ahorro de los capitalistas ($s_c$), es una proporción de sus beneficios ($B_c$), dado el producto marginal ahorrar ($PMgs$) de los capitalistas.

$$S_c = s_c.B_c$$

- El ahorro de los trabajadores ($s_w$), es una proporción de su ingreso ($Y_w$), dado el producto marginal ahorrar ($PMgs$) de los trabajadores.

$$S_w = s_w.Y_w \qquad\qquad 0 \le s_w < s_c \le 1$$

$$S_w = s_w(W + B_w)$$

### 2.7.2 Función de ahorro de Pasinetti

El ahorro agregado depende directamente del ingreso nacional y de los beneficios de los capitalistas, dado el producto marginal ahorrar ($PMgs$) de las clases sociales.

$$S = S(Y, B_c)$$

$$S = S_c + S_w$$

$$S = s_c.B_c + s_w.Y_w \ldots (I)$$

De. $Y = W + B \Rightarrow Y = W + B_c + B_w \Rightarrow Y - B = W + B_w = Y_w \ldots (II)$

Reemplazando la ecuación ($II$) en ($I$):

$$S = s_c.B_c + s_w.Y_w$$

$$S = s_c.B_c + s_w.(W + B_w)$$

$$S = s_c.B_c + s_w.(Y - B_c)$$

$$S = s_Y.Y + (s_c - s_w).B_c$$

**Tasa de ahorro de la sociedad**

De la forma de ahorro agregada, dividiendo entre: $Y$

$$\frac{S}{Y} = s_Y + (s_c - s_w).\frac{B_c}{Y}$$

Donde la tasa de ahorro de la sociedad es endógena $S = S(B_c / Y)$.

**La función de beneficio de los capitalistas**

Partiendo de la condición de equilibrio macroeconómico, tenemos:

$$S = I$$

$$s_w.Y + (s_c - s_w).B_c = I$$

$$B_c = \frac{1}{s_c - s_w}.(I - s_w.Y)$$

**Razón de beneficio de los capitalistas respecto al ingreso nacional**

De la función de beneficios de los capitalistas

$$B_c = \frac{1}{s_c - s_w}.(I - s_w.Y)$$

Dividiendo entre *Y*, tenemos:

$$\frac{B_c}{Y} = \frac{1}{s_c - s_w}.\left(\frac{I}{Y} - s_w\right)\ldots (III)$$

**Razón de beneficio de los capitalistas respecto al stock de capital**

De la función de beneficios de los capitalistas

$$B_c = \frac{1}{s_c - s_w}.(I - s_w.Y)$$

Dividiendo entre *k*, tenemos:

$$\frac{B_c}{K} = \frac{1}{s_c - s_w}.\left(\frac{I}{K} - s_w\right)\ldots(IV)$$

De la relaciones

$$B = B_c + B_w$$

Dividiendo entre stock de capital (*K*)

$$\frac{B}{K} = \frac{B_c}{K} + \frac{B_w}{K}$$

Multiplicando y dividiendo entre $K_w / K$

$$\frac{B}{K} = \frac{B_c}{K} + \underbrace{\frac{B_w}{K_w}}.\frac{K_w}{K}$$

$$\frac{B}{K} = \frac{B_c}{K} + r_w.\left(\frac{K_w}{K}\right)\cdots(V)$$

Así mismo de la relación

$$B = B_c + B_w$$

Dividiendo entre stock de capital (*y*)

$$\frac{B}{Y} = \frac{B_c}{Y} + \frac{B_w}{Y}$$

Multiplicando y dividiendo entre $K_w / K$

$$\frac{B}{Y} = \frac{B_c}{Y} + \underbrace{\frac{B_w}{K_w}}.\frac{K_w}{K}.\frac{K}{Y}$$

$$\frac{B}{Y} = \frac{B_c}{Y} + r_w.\left(\frac{K_w}{K}\right).\frac{K}{Y}\cdots(VI)$$

Donde:

$r_w$ : Tasa de rendimiento de capital por trabajador

$K_w / K$ : Razón de capital de los trabajadores al capital agregado

Obteniendo algebraicamente $K_w / K$ tenemos:

En un equilibrio dinámico, tenemos que: $\frac{K_w}{K} = \frac{S_w}{\underbrace{S}}$

$$\frac{K_w}{K} = \frac{s_w.Y}{S}\ldots(VII)$$

Reemplazando la Condición $S = I$ , y la ecuación ($II$), en la ecuación ($IV$) nos da:

$$\frac{K_w}{K} = \frac{s_w.(Y - B_c)}{I} \Rightarrow \frac{K_w}{K} = \frac{s_w.Y}{I} - \frac{s_w.(Y - B_c)}{I}$$

Despejando el beneficio de los capitalistas ($B_c$), tenemos:

$$B_c = \frac{1}{s_c - s_w}.(I - s_w.Y)$$

Dividiendo la ecuación anterior entre la inversión ( $I$ ), tenemos:

$$\frac{B_c}{I} = \frac{1}{s_c - s_w}.\left(1 - \frac{s_w.Y}{I}\right)$$

Reemplazando y resolviendo, tenemos la parte de capital correspondiente a los trabajadores en situación de equilibrio.

$$\frac{K_w}{K} = \frac{s_w.s_c}{s_c - s_w}.\frac{Y}{I} - \frac{s_c}{s_c - s_w} \cdots (VIII)$$

Reemplazando $K_w / K$ y la ecuación ( $IV$ ), en la ecuación ( $VIII$ )
La participación de los beneficios en el stock de capital es:

$$\frac{B}{K} = \frac{B_c}{Y} + r_w.\left(\frac{s_c.s_w}{s_c - s_w} - \frac{s_c}{s_c - s_w}\right) \cdots (IX)$$

Reemplazando $K_w / K$ en la ecuación ( $VI$ ), tenemos:

$$\frac{B}{Y} = \frac{B_c}{Y} + r_w.\left(\frac{s_c.s_w}{s_c - s_w}.\frac{Y}{I} - \frac{s_c}{s_c - s_w}\right).\frac{K}{Y} \cdots (X)$$

### 2.7.3 Supuesto de largo plazo

En el largo plazo se da la igualdad de las diversas tasas de ganancia y el interés, esto quiere decir que:

$$\underbrace{\frac{B_c}{K_c}}_{r_c} = \underbrace{\frac{B_w}{K_w}}_{r_w} = \underbrace{\frac{B}{K}}_{r} = i$$

$$r_c = r_w = r = i$$

La implicaría de este supuesto, se puede notar si reemplazados el supuesto de largo plazo en la ecuación ( $IX$ ) y simplificando nos da:

$$\frac{B}{K} = \frac{1}{s_c}.\frac{r}{K}$$

En una economía capitalista donde los trabajadores ahorran y son propietarios de sus intereses en el largo plazo la tasa de beneficio, va depender directamente de la tasa de crecimiento del capital dado la propensión marginal ahorrar ( $PMgs_c$ ) de los capitalistas.

Ahora aplicando dicho supuestos se tiene, que la ecuación ( $X$ ) y simplificando se tiene:

$$\frac{B}{Y} = \frac{1}{s_c}.\frac{I}{Y}$$

En una economía capitalista donde los trabajadores ahorran y son propietarios de sus intereses, la participación de los beneficios en el ingreso nacional depende directamente del coeficiente inversión.

Así mismo se tiene que $B = \frac{I}{s_c}$, los beneficios dependen directamente del volumen de inversión dado en producto marginal de los capitalistas.

**Tasa de crecimiento**

Este resultado es estrictamente válido en una economía cerrada con dos clases (trabajadores y capitalistas.) en la que la cuantía de la inversión está fijada al nivel necesario para asegurar el pleno empleo, en el sentido que se crece a la tasa del stock de capital ($g_K$) y la (pura) propensión al ahorro de los capitalistas ($s_c$), esto es:

$$r = \frac{g_K}{s_c} \Rightarrow g_K = s_c.r$$

En el crecimiento proporcionado, donde $g_K = g_Y$, esto nos da reemplazando en la ecuación anterior la tasa de crecimiento del producto.

$$g_Y = s_c.r \text{, } \textit{la ecuación de crecimiento de Cambridge}$$

En una economía capitalita en donde los trabajadores ahorran en el largo plazo, la tasa de crecimiento del producto depende directamente de la tas de beneficio, dado el producto marginal ($PMgs_c$) de los capitalistas.

### Importancia

El modelo de *Kaldor* presenta un caso límite y hace un supuesto extremo, que los capitalistas no ahorran.

En cambio el modelo de *Pasinetti* no necesita sumir que los trabajadores no ahorran, sino que el considera que los trabajadores no ahorran y son propietarios de sus intereses, llegando al mismo resultado de *Kaldor*, significa que en una economía capitalista no es importante el ahorro de los trabajadores sino la propensión marginal ahorrar de los capitalistas, por eso se destaca la gran importancia de la $PMgs_c$ de los capitalistas.

## 2.8 *Modelo de Kalecki*

Economista polaco *Michal Kalecki*, nos presenta en su obra quizá más importante titulado “*Theory of Economic Dynamics: An essay on cyclical and long- run changes in capitalist economy*”1954 (*La teoría de Dinámica Económica: Un ensayo en cíclico y largo - ejecute los cambios en la economía del capitalista*). En este ensayo nos muestra una economía capitalista que solo produce tres bienes de consumo, de lujo y de inversión[30].

Kalecki nos dice el desarrollo de largo plazo, o mejor dicho al crecimiento, es relativamente escaso en la economía. Donde Atribuye que el desarrollo de largo plazo de una economía capitalista a las innovaciones, pero no realiza un examen detallado de las mismas en un marco capitalista, en sentido de que hay una tendencia inherente al capitalismo a impulsar el constante crecimiento de la productividad del trabajo. Por tanto postula una teoría del crecimiento exógeno.

*Kalecki* sostenía que el desarrollo a largo plazo no era algo inherente a la economía capitalista, si no que la concurrencia de “factores del desarrollo” específicos que apunten en tal dirección, particularmente las innovaciones, y en especial aquellas que impliquen un

[30] A quienes les interese revisar Kalecki, M. (1956): *Teoría de la dinámica económica,* Fondo de Cultura Económica.

mayor volumen de capital. Es por eso que su análisis se concentra particularmente en un estudio y el análisis de largo plazo. Recordemos que la afirmación de que el largo plazo no es más que una larga sucesión de cortos.

Una característica central del estudio del crecimiento en el largo plazo en *Kalecki* es que parte del supuesto de que la economía funciona en términos generales con una subutilización del stock de capital. No es arriesgado afirmar que fue el primero que trabajó bajo este supuesto (y ciertamente, uno de los pocos) [31].

### 2.8.1 Supuestos del modelo

✓ Existen tres sectores que producen:

- Sector I :Sector productor de bienes de inversión, esta representara con un subíndice: 1.
- Sector II: Sector productor de bienes de consumo de lujo, esta representara con un subíndice; 2.
- Sector III :Sector productor de bienes de consumo necesario, esta representara con un subíndice; 3.

✓ Existe integración vertical de cada sector.

✓ Existen solo dos clases sociales que son:

- Trabajadores, representados con un subíndice; $c$.
- Capitalistas, representados con un subíndice; $w$.

✓ Los capitalistas ahorran una proporción de su beneficio.

✓ Los trabajadores no ahorran.

✓ La economía no tiene relación con el exterior.

✓ Las mercancías se venden a un precio que coincide con su valor.

✓ El producto bruto final se desdobla en salario y beneficio.

✓ El producto bruto final sectorial por el ingreso se desdobla en salario y beneficio sectoriales.

### Análisis

Del sistema de valores, tenemos el valor de la mercancía[32].
Valor de la mercancía = C+V+P

$$\sum valores\_de\_mercancia = \sum C + \sum V + \sum P$$

Producto social = C + V + P
*Kalecki* hace la transición hacia el sistema de valores hacia el sistema de precios.

$$VBP = insumo + depreciación + \underbrace{salarios + beneficios\_netos}$$

$$VBP = depreciación + \underbrace{VAB}$$

$$VBP = insumo + \frac{VAB}{PNB}$$

---

[31] Estos párrafos están basados en la Serie de documentos de apoyo a la docencia, Michal Kalecki "Ciclo y Tendencia" (2006), Por Pablo Bortz de la Universidad Nacional de Luján de la Republica de Argentina.

[32] Para mejor entendimiento del valor de la mercancía y su sistema de precios, el lector interesado puede revisar, Paúl Sweezy, "*Teoría del desarrollo capitalista*", Fondo Cultura Económica. México, 1973.

Donde:

VAB: Valor agregado bruto.

PNB: Producto nacional bruto.

P: Precio.

### Enfoque de *Kalecki*

En este enfoque a fin de expresar el producto bruto del sector privado, empecemos por el ingreso nacional. La participación del salario en el ingreso se supone en general bastante estable en el curso del ciclo, pero no puede decirse lo mismo de la suma de salarios y sueldos.

| Sectores | | I | II | III | *Subtotal* |
|---|---|---|---|---|---|
| VAB | $W$ | $W_1$ | $W_2$ | $W_3$ | $W$ |
| | $B^b$ | $B_1^b$ | $B_2^b$ | $B_3^b$ | $B$ |
| VAB | | $Y_1 = I^b$ | $Y_2 = C^K$ | $Y_3 = C^w$ | $VAB = Y$ |

Donde:

$W_i$ : Salarios sectoriales.

$B_i^b$ : Beneficio bruto sectorial.

$Y_i$ : Producto bruto final del sectorial.

$C^K$ : Consumo de los capitalistas.

$C^w$ : Consumo de los trabajadores.

$I^b$ : Inversión bruta.

Subíndice: *c* (capitalistas), *w* (trabajadores) y *b* (bruto).

$C = C^K + C^w$

$C^K = c_K.B^b$

$C^w = c_w.W$

### 2.8.2 Análisis de Corto Plazo

Sabemos que $Y = W + B^b$, pero también es igual $Y = C + I^b$, igualando las dos ecuaciones tenemos:

$$W + B^b = \underbrace{C} + I^b$$

$$W + B^b = C^K + C^w + I^b \ldots(I)$$

Debido a que los trabajadores no ahorran $s_w = 0$, esto implica que los trabajadores destinen todo su ingreso al consumo $c_w = 1(PMgc_w = 1)$, por que, $s_w + c_w = 1 \Rightarrow 0 + c_w = 1$, nos da $C^w = c_w.w \Rightarrow C^w = (1).W$ reempleando el consumo de los trabajador que es iguala la masa de salario en la ecuación ($I$).

$$\cancel{W} + B^b = C^K + (\cancel{W}) + I^b$$

$B^b = C^K + I^b \ldots (I')$, *la ecuación de beneficios*

*Kalecki* nos dice que el consumo de los capitalistas es una proporción de sus beneficios, entonces expresando el consumo de los capitalistas tenemos:

$$C^K = c_K.B^b$$

Reemplazando el consumo agregado de los capitalitas que se extrae de la ecuación anterior, tenemos:

$$\underbrace{C^K} = c_K.B^b$$

$$B^b - I^b = c_K.B^b \Rightarrow B^b = \frac{I^b}{1 - c_k} \cdots (II)$$

La ecuación ($II$), nos da el beneficio bruto que depende directamente del volumen de inversión, donde trabajadores gastan todo lo que gana y los capitalistas gana todo lo que gastan.

## Ecuación de Intercambio Fundamental

Sabes que de la ecuación de beneficio tenemos:

$$B^b = \underbrace{C^K} + \underbrace{I^b}$$

$$\underbrace{B^b} = \underbrace{Y_2 + Y_1}$$

$$\cancel{B_1^b} + \cancel{B_2^b} + B_3 = W_2 + \cancel{B_2} + W_1 + \cancel{B_1}$$

$B_3^{\ b} = W_1 + W_2$, *la ecuación de intercambio fundamental*

Los capitalistas en el sector III, luego de pagar a los trabajadores se quedan con todo el excedente de la forma de consumo necesario y lo intercambian con los salarios del sector II.

## Determinación del producto de bienes de consumo necesario: $Y_3$

Como sabemos que los trabajadores no ahorro, sino que todo su ingreso lo destinan al consumo, tenemos que:

$C^w = c_w.W$, como los trabajadores no ahorran, $s_w = 0, c_w = 1$, reemplazando en la ecuación anterior del consumo de los trabajadores tenemos: $C^w = W$.

Del producto bruto final de sector de bienes necesario tenemos que:

$Y_3 = W_1 + W_2 + W_3$

Asiendo un artificio multiplicando y dividiendo entre el producto de cada sector tenemos:

$$Y_3 = \frac{W_1}{Y_1}.Y1 + \frac{W_2}{Y_2}.Y_2 + \frac{W_3}{Y_3}.Y_3 \cdots (III)$$

Donde:

$\frac{W_1}{Y_1} = \Psi_1$: Participación de los salario del sector 1 en el producto bruto final del sector $Y_1$.

$\frac{W_2}{Y_2} = \Psi_2$: Participación de los salario del sector 2 en el producto bruto final del sector $Y_2$.

$\frac{W_3}{Y_3} = \Psi_3$: Participación de los salario del sector 3 en el producto bruto final del sector $Y_3$.

$\Psi_i$ : Parámetro de la distribución del ingreso del sector i-ésimo $\quad i = 1,2,3$

Reemplazando las variables anteriores en la ecuación ($III$)

$$Y_3 = \Psi_1.Y_1 + \Psi_2.Y_2 + \Psi_3.Y_3 \cdots (I) \Rightarrow Y_3.(1-\Psi_3) = \Psi_1.Y_1 + \Psi_2.Y_2$$

Entonces el producto de sector $Y_3$, es:

$$Y_3^* = \frac{\Psi_1.Y_1 + \Psi_2.Y_2}{1-\Psi_3}$$

Donde: $Y_3 = C^w$, $Y_1 = I^b$ y $Y_2 = C^K$.

Reemplazando en la ecuación del sector $Y_3$, nos da el producto de bienes necesario.

$$C^w = \frac{\Psi_1.I^b + \Psi_2.C^K}{1-\Psi_3}$$

## Determinación del producto de bienes agregados

De la demanda efectiva y de una economiza cerrada tenemos la condición de equilibrio macroeconómico donde el producto es igual al consumo mas la inversión.

$Y$ = Demanda efectiva

$$Y = \overbrace{C}^{} + I^b$$

$$Y = \overbrace{C^w}^{} + C^K + I^b$$

$$Y = \frac{\Psi_1.I^b + \Psi_2.C^K}{1-\Psi_3} + C^K + I^b \cdots (IV)$$

Esta ecuación nos quiere decir que el producto agregado de equilibrio va depender directamente del volumen de inversión bruta y del volumen de consumo de los capitales dado los parámetros de distribución del ingreso ($\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3$).

$$Y^* = \frac{\Psi_1.I^b + \Psi_2.C^K + (1-\Psi_3).C^K + (1-\Psi_3).I^b}{1-\Psi_3}$$

$$Y^K = \frac{[1-\Psi_3 + \Psi_2].C^K + [\Psi_1. + (1-\Psi_3)].I^b}{1-\Psi_3}$$

$$Y^K = \frac{1}{1-\Psi_3}.\left[[1-\Psi_3 + \Psi_2].C^K + [\Psi_1. + (1-\Psi_3)].I^b\right]$$

Se determina la producción de equilibrio a partir de los esquemas de reproducción amplia del producto. Se determina a partir de la demanda efectiva, y este modelo se considera las clases sociales.

### 2.8.3 Análisis de Largo plazo

*Kalecki* nos dice que en el largo plazo el consumo de los capitalistas depende directamente de la inversión bruta.

#### La Función de Largo Plazo

Plantea la función de largo plazo del consumo

$C_{LP}^K = f(I^b)$

Sea una función de consumo lineal $C_{LP}^K = m.I^b \ldots (V)$

$$C_{LP}^K = c_K.B^b \ldots (VI)$$

Donde:

$c_K$ : Producto marginal de los capitalistas ($PMg$)

$s_K$ : Producto marginal ahorrar de los capitalistas.

Se tiene que $B^b = \dfrac{I^b}{s_K}$, reemplazando esta ecuación en la ecuación ($VI$).

$$C_{LP}^K = \underbrace{\frac{c_K}{s_K}}.I^b$$

$$C_{LP}^K = m.I^b$$

Donde:

$m = \dfrac{c_K}{s_K}$: Razón del producto marginal del consumo de los capitalistas entre el producto marginal del ahorro de los capitalistas.

$\delta$ : Tasa de depreciación del stock de capital

#### Ecuación de acumulación bruta de capital

$$I^b = I^n + I_{LP}^K \Longrightarrow I^b = \Delta K + \delta.K$$

$$I^b = \frac{\Delta K}{K}.K + \delta.K$$

$$I^b = \overbrace{g_K}.K + \delta.K \Longrightarrow I^b = (g_K + \delta).K$$ , *la ecuación de la ecuación bruta de capital*

**Determinación del producto agregado a largo plazo**

De la ecuación ($IV$), tenemos:

$$Y^* = \frac{\Psi_1.I^b + \Psi_2.C^K}{1-\Psi_3} + C^K + I^b$$

Asumiendo $C^K = m.I^b$

Reemplazando en la ecuación $Y^*$, tenemos

$$Y^* = \frac{\Psi_1.I^b + \Psi_2.I^b}{1-\Psi_3} + m.I^b + I^b \Longrightarrow Y^* = I^b.\left[\frac{\Psi_1 + \Psi_2.m}{1-\Psi_3} + m + 1\right]$$

$$Y_{LP}^K = (g_K + \delta)K.\left[\frac{\Psi_1 + \Psi_2.m}{1-\Psi_3} + m + 1\right]$$ , *producto agregado de lago plazo*

### 2.8.4 Crecimiento económico en el largo plazo

Del producto de equilibrio en el largo plazo ($Y^*$) , multiplicando i dividiendo entre $K$ , tenemos:

$$\frac{\partial Y_{LP}^*}{\partial K} = (g_K + \delta)K.\left[\frac{\Psi_1 + \Psi_2.m}{1-\Psi_3} + m + 1\right].\frac{K}{K}$$

$$\frac{\partial Y_{LP}^*}{\partial K} = \frac{Y}{K}$$

$$\frac{\partial Y_{LP}^*}{\partial K} = \frac{g_K}{g_K}.\frac{Y}{K} \Longrightarrow \underbrace{\frac{\partial Y^*}{\partial K}} = g_K.\left(\frac{Y}{\frac{\Delta K}{K}.K}\right)$$

$$\sigma = g_K.\left(\frac{Y}{\frac{\Delta K}{K}.K}\right) \Longrightarrow \sigma = g_K.\left(\frac{Y}{I^n}\right)$$

$$\sigma = g_K.\left(\frac{1}{I^n / Y}\right) \Longrightarrow \sigma = \frac{g_K}{a^n} \Longrightarrow g_K = a^n.\sigma$$ , *la ecuación de Kalecki*

Donde:

$\frac{I^n}{Y} = a^n$ : Coeficiente de inversión neta.

Asumiendo el crecimiento proporcionado tenemos: $g_K = g_Y$ , reemplazando de *Kalecki*.

$$g_Y = a^n.\sigma$$ *, la ecuación de Domar-Kalecki*

Donde:

$\sigma = 1/\sigma$ : Representa la relación producto – capital, que es el reciproco de capital – producto.

Reemplazando la relación anterior en la ecuación de *Kalecki*, se tiene:

$$g_Y = \frac{a^n}{v}$$ *, la ecuación de Harrod-Kalecki*

Podemos apreciar que la ecuación de *Harrod* y *Domar* contienen el producto marginal ahorrar, mientras que el modelo de *Kalecki* en su ecuación fundamental contiene el coeficiente de inversión.

# Capítulo III

## Crecimiento con progreso tecnológico y tasa de ahorro exógena

*"Toda teoría depende de su suposiciones que no son totalmente ciertas. Por eso son teorías. El arte de elaborar teorías con éxito consiste en hacer las inevitables suposiciones simplificadoras en forma tal que los resultados finales no sean muy sensibles".*

*Robert Solow (1956), Pág.: 56.*citado
Por*: Charles Jones (2000), Pág.:18*

## 3.1 Definición de técnica, tecnología, cambio técnico y progreso tecnológico

**(a) Técnica:**
Es un método de producción en el cual existen una determinada proporción entre los factores de producción e insumos para producir un determinado bien.

**(b) Tecnología:**
Esto hace referencia a un fondo social de conocimiento sobre el arte de la producción y la técnica. Es el conjunto de conocimientos y técnicas.

**(c) Cambio Técnico:**
Es la modificación de los factores e insumos para producir un determinado bien.

**(d) Progreso Tecnológico:**
Son todos los avances cualitativos y cuantitativos del fondo social de conocimiento sobre el arte de la producción y la técnica.

### 3.1.1 *Schumpeter* y los componentes del progreso tecnológico

Los conceptos introducidos por *Schumpeter* que más influencia ha tenido es el de innovación. Según él, existe un estado de no crecimiento, el «circuito» económico, y un estado de crecimiento, la «evolución». El paso del «circuito» a la «evolución» se efectúa por medio de las innovaciones, que constituyen el motor del crecimiento.

El nos señala que el progreso tecnológico que tiene varios componentes:

- ✓ Proceso de Invención.
- ✓ Proceso de Innovación.
- ✓ Proceso de Difusión.

**Proceso de Invención**

Es aquella fase en la cual se efectúan los grandes descubrimientos de la humanidad.

**Proceso de Innovación**

Es aquel proceso de convertir los grandes inventos de la humanidad y las grandes ideas en mercancía que puedan ser utilizados por la población.

**Proceso de Difusión**

Implicaría del progreso tecnológico:

✓Aumento significativo de la producción elevando la productividad.

✓Se reducen los costos significativamente de producción.

*Schumpeter* plantea que el progreso de innovación se va caracterizar por:

✓Creación y producción de nuevos bienes.

✓Formulación y aplicación de nuevos métodos de producción.

✓Aseguramiento de los mercados de materias primas.

✓Conquista de nuevos mercados.

### 3.1.2 Progreso tecnológico exógeno y desincorporado

Es aquel tipo de progreso tecnológico que no explica las causas ni los orígenes del progreso tecnológico simplemente asumen que se dio el progreso tecnológico en forma exógena. Así mismo asume que el progreso tecnológico se concentra en nuevas maquinarias y mejoramientos de los trabajadores.

**Representación Analítica**

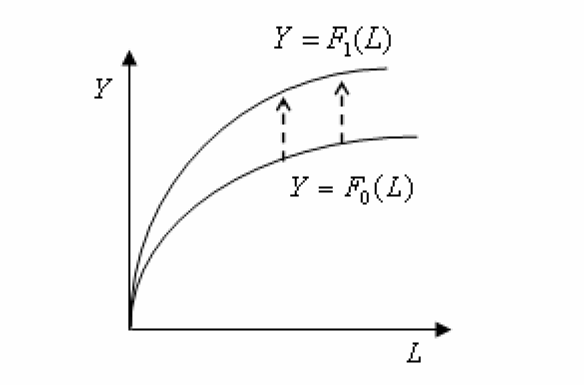
La función reproducción dinámica es aquella función que considera explícitamente el bien.

- ✓ Función de producción dinámica desplazable.
- ✓ Función de producción dinámica aumentativa de la eficiencia de los factores.

**Función de Producción Dinámica desplazable**

Es aquella función dinámica que con progreso tecnológico se traslada la función en forma ascendente, como se puede apreciar en el Gráfico [3.1].

**Gráfico [3.1]: Desplazamiento de la función Dinámica**




**La función de producción dinámica aumenta de la eficiencia de los factores**

Es aquella función de producción dinámica que con el progreso tecnológico lleva aun aumento de la productividad de los factores.

Analíticamente $Y_t = F(A_t, K_t, B_{(t)}.L_t)$

Donde:

$Y_t =$ Producción agregada en ele instante "*t*".

$K_t =$ Stock de capital agregado en el instante "*t*".

$A_t =$ Factor aumentativo de la eficiencia del capital.

$A_t = A_0.e^{m.t}$

Con las propiedades:

Si *t =0* entonces $A_{t=0} = 1$

Si *t >0* entonces $A_{t \succ 0} \succ 1$

$\dot{A}$ >0, tasa de progreso tecnológico debido a la eficiencia de capital

$$g_{A(t)} = \frac{\dot{A}_{(t)}}{A_{(t)}} = m_K$$

$A_{(t)}.K_t$ : El stock de capital eficiente o eficaz.

$$A_{(t)}.K_t = A_0.e^{m_K.t} = K_t^e = \overline{K}_t$$

$L_t$ : Fuerza de trabajo agregada en el instante "*t*".

$B_{(t)}$ : Factor aumentativo de la eficiencia del trabajo.

$$B_t = B_0.e^{m_L.t}$$

Con las propiedades:
Si *t =0* entonces $B_{t=0} = 1$
Si *t >0* entonces $B_{t\succ 0} \succ 1$

$\dot{B}$ >0, tasa de progreso tecnológico debido a la eficiencia del trabajo.

$$g_{B(t)} = \frac{\dot{B}_{(t)}}{B_{(t)}} = m_L$$

$B_{(t)}.L_t$ : Fuerza de trabajo eficiente o eficaz.

$$B_{(t)}.L_t = B_0.e^{m_L.t} = L_t^e = \overline{L}_t$$

### 3.1.3 Clasificación del progreso tecnológico

✓Progreso tecnológico neutral.

✓Progreso tecnológico sesgado.

✓Progreso tecnológico rentable.

✓Progreso tecnológico radical.

✓Progreso tecnológico exógeno.

✓Progreso tecnológico endógeno.

✓Progreso tecnológico no rentable.

✓Progreso tecnológico desincorporado.

✓Progreso tecnológico incorporado.

**Progreso tecnológico neutral**
Es te tipo de progreso tecnológico que debe introducirse en la practica, donde nos permite producir la misma cantidad del producto con menor cantidad de capital. Esto nos dice que ahorra capital en relación con el trabajo necesario para producir. Y estos progresos tecnológicos se clasifican como:

**(a) Progreso tecnológico a lo *Hicks***

*Hicks* nos indica que la innovación tecnológica era neutral (neutralidad de *Hicks*) con respecto al capital y al trabajo y solo si la relación entre productividades marginales de los factores se mantiene constante para cada factor será ahorrador de capital de trabajo, si el producto marginal del trabajo aumenta mas que el producto marginal del trabajo cuando la relación capital y trabajo permanece constante y esto por una innovación tecnológica.



Ejercicios de Crecimiento Económico

Este progreso técnico neutral a los *Hicks* puede escribirse:
Donde se plantea que $A_t = B_t$

**(b) Progreso tecnológico neutral a lo *Harrod***

*Harrod* nos dice que el progreso técnico es insesgado, y según esto la innovación tecnológica es neutral (neutralidad de *Harrod*).
Donde nos dice que la misma cantidad de capital y una cantidad menor de trabajo se obtienen el mismo producto.

*Phelps* (1962,1966), nos dice que una condición necesaria y suficiente para la existencia del estado proporcionado en una economía con progreso tecnológico exógeno y neutral en el sentida de *Harrod* esto quiere decir que es potenciador de trabajo.

**(c) Progreso Tecnológico neutral a lo *Solow***

En la ecuación de producción dinámica aumentativa de la eficiencia de los factores se tiene:
Donde $B_{(t)} = 1$, luego

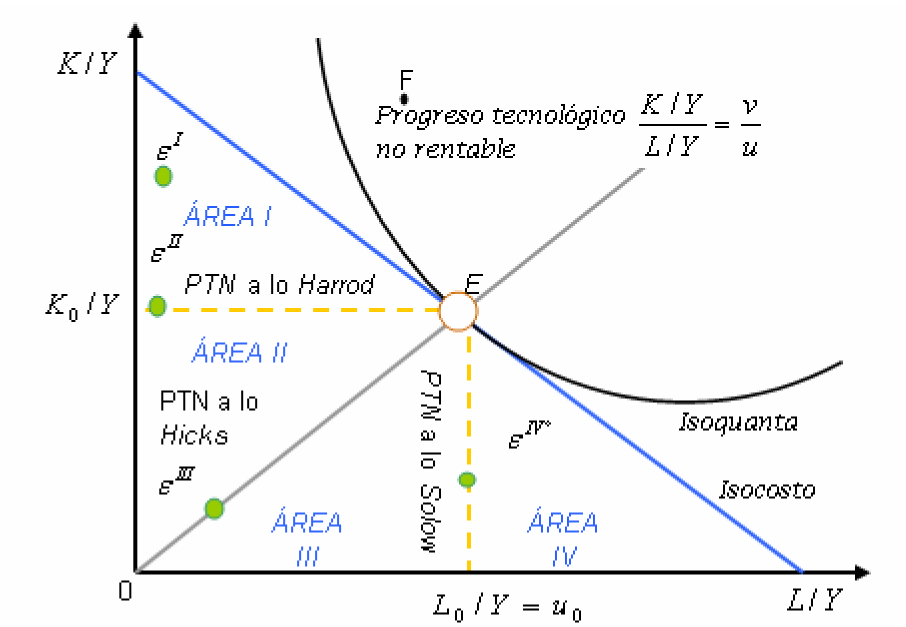
$$Y_t = F(A_{(t)}K_t, L_t)$$

Con este tipo de progreso tecnológico neutral a lo *Solow* únicamente ocurre un aumento en la productividad del capital.

### 3.1.4 Clasificación general del progreso tecnológico

Sea una economía capitalistas que solo tiene capital y trabajo, como podemos apreciar en el Gráfico [3.2] se puede notar los tipos de progreso tecnológico de *Solow*, *Harrod* y *Hicks* también con un mejor progreso tecnológico el mapa de isocuanta se contrae.

**Gráfico [3.2]: Clasificación del progreso**




Nótese: Que en el nuevo punto óptimo $\varepsilon^{I}$ es existe progreso tecnológico.
$\varepsilon^{III}$: Es el progreso tecnológico neutral a lo *Hicks* por que la productividad del capital aumenta en la misma proporción que el ahorro de capital y trabajo.
$\varepsilon^{II}$: Progreso tecnológico neutral a lo *Harrod*, donde se mantiene la relación capital-producto ($v_0$).

$\varepsilon^{IV}$: Progreso tecnológico neutral a lo *Solow*, se mantiene invariable la relación trabajo-producto ($u_0$).

Área I: Progreso tecnológico intensivo en capital y ahorrador de trabajo.

Área II: Progreso tecnológico relativamente ahorrador de trabajo. Con este trabajo se ahorra tanto capital como trabajo, pero se ahorra más relativamente de trabajo.

Área III: Progreso tecnológico ahorrar de capital. Con este tipo de progreso tecnológico se ahorra capital y trabajo, pero se ahorra relativamente más capital.

Área IV: Progreso tecnológico es intensivo en trabajo y ahorrador en capital.

## 3.2 Solow con progreso tecnológico exógeno y desincorporado

En esta parte hablaremos de la mejora tecnológica y del crecimiento de largo plazo, por que se permite introducir el progreso tecnológico de largo plazo.

**Supuestos del modelo**
A los supuestos básicos de *Solow* se le añaden los siguientes supuestos:

- ✓ Sea una economía con progreso tecnológico.
- ✓ Sea un progreso tecnológico exógeno, se asume que la tasa de progreso tecnológico es constante.
- ✓ Sea un progreso tecnológico desincorporado.
- ✓ Existe un progreso tecnológico neutral a lo *Harrod.*

**Análisis**

Sea la función de producción dinámica aumentativa de la eficiencia de los factores.

$$Y_t = F(A_{(t)}.K_t, B_{(t)}L_t)$$

Puesto que se asume que el progreso tecnológico neutral a lo *Harrod* $A_{(t)} = 1$.

$$Y_t = F(K_t, B_{(t)}L_t)$$

Si dividimos entre la fuerza de trabajo eficiente ($B_{(t)}L_t$).

$$\frac{Y_t}{B_{(t)}L_t} = F\left(\frac{K_t}{B_{(t)}L_t}, \frac{B_{(t)}L_t}{B_{(t)}L_t}\right)$$

$y_t = f(k_t^e, 1) \Rightarrow y_t = f(k_t^e) \ldots (FPI)$ en unidades eficiente

Donde:

$B_{(t)}$: Factor aumentativo de la eficiencia de trabajo.

$B_{(t)}L_t$: Fuerza de trabajo eficiente.

$\dfrac{Y_t}{B_{(t)}L_t} = \dfrac{y_t}{B_{(t)}} = \bar{y}_t = y^e$: Producto por trabajador eficiente.

$\dfrac{K_t}{B_{(t)}L_t} = \dfrac{k_t}{B_{(t)}} = \bar{k}_t = k^e$: Capital por trabajador eficiente.

Subíndice e: Es eficiente.

**Inversión neta por trabajador eficiente**

$$k_t^e = \frac{k_t}{B_{(t)}} = \frac{K_t}{B_{(t)}L_t} \Rightarrow K_t = k_t^e.B_{(t)}L_t$$

Dividiendo entre $B_{(t)}L_t$

$$\frac{I^n}{B_{(t)}L_t} = \frac{1}{B_{(t)}L_t}.\frac{d\left[k_t^e.B_{(t)}L_t\right]}{dt} = k_t^e + \frac{d(B_{(t)}L_t)}{dt}.k_t^e$$

$$\frac{I^n}{B_{(t)}L_t} = \frac{\partial k_t^e}{\partial t} + (n+m).k_t^e$$

**Ecuación fundamental de *Solow* con progreso tecnológico**

De la condición de equilibrio macroeconómico, tenemos:

$$S^b = I^b$$

$$s.Y = I^n + I^{rep}$$

$$s.F(K, B_{(t)}L) = I^n + \delta.K$$

Dividiendo entre $B_{(t)}L$

$$s.F\left(\frac{K}{B_{(t)}L}, \frac{B_{(t)}L}{B_{(t)}L}\right) = \frac{I^n}{B_{(t)}L} + \delta.\frac{K}{B_{(t)}L} \Rightarrow s.f(k^e, 1) = \frac{\partial k_t^e}{\partial t} + (n + m_L).k^e + \delta.k^e$$

$s.f(k^e) = \dfrac{\partial k_t^e}{\partial t} + (n + m_L + \delta).k^e$, *la ecuación fundamental de solow con progreso tecnológico*

Donde:
$\delta$ : Tasa de depreciación del stock de capital.

Es una ecuación del proceso de acumulación de capital y del progreso tecnológico en una economía capitalista.

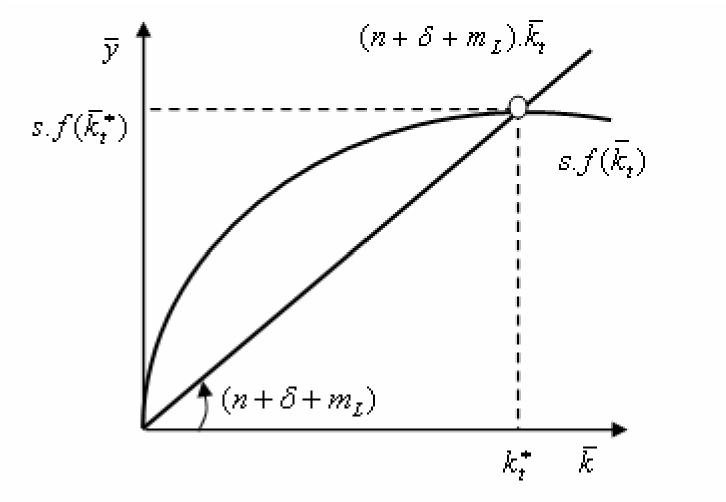
Señala que la tasa de cambio del capital por trabajador eficiente será igual al remante del ahorro bruto por trabajador eficiente, respecto a la ampliación bruta de capital considerando el progreso tecnológico.

**Crecimiento proporcionado**

El crecimiento proporcionado se da cuando $\dfrac{\partial \bar{k}_t}{\partial t} = 0$, entonces reemplazado en la ecuación de *Solow* con progreso tecnológico, tenemos:

Si $\dfrac{\partial \bar{k}_t}{\partial t} = 0$, entonces $s.f(k^e) = (n + m_L).k^e + \delta.k^e$ , se determina el capital por trabajador $\bar{k}^*$.
Como se puede apreciar en el Gráfico [3.3].

**Gráfico [3.3]: Diagrama de *Solow* con progreso tecnológico**




**Versión de *Barro***

Dividiendo la ecuación fundamental de *Solow* con progreso tecnológico entre $\bar{k}_t$.

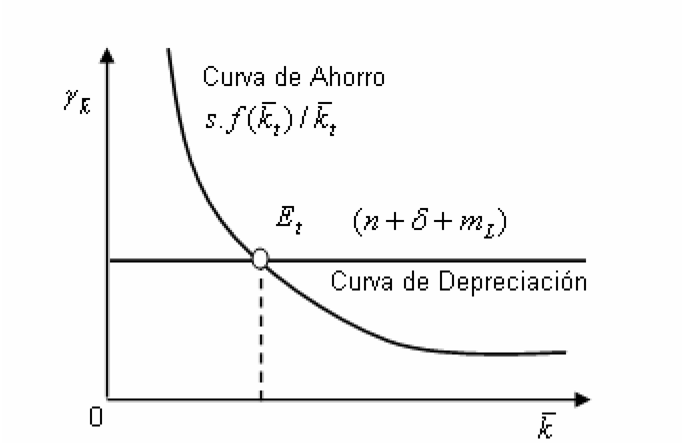
$$\frac{1}{\bar{k}_t}.\frac{\partial \bar{k}_t}{\partial t} = \frac{s.f(k_t)}{\bar{k}_t} - (n+\delta+m_L)$$

$$\gamma_{\bar{k}} = \frac{s.f(k_t)}{\bar{k}_t} - (n+\delta+m_L)$$

En el estado de crecimiento proporcionado $\gamma_{\bar{k}}$ es nulo.

Si $\gamma_{\bar{k}} = 0$ entonces $\frac{s.f(k_t)}{\bar{k}_t} = (n+\delta+m_L)$, se determina $k_t^*$

**Gráfico [3.4]: Versión de *Barro* con progreso tecnológico**




## 3.3 Solow –Swan con progreso tecnológico exógeno

Para generar el crecimiento sostenido se introduce el progreso tecnológico. Para genera el crecimiento de largo plazo que no se podía explicar en el Capítulo anterior.

### 3.3.1 Supuestos del modelo

A los siguientes supuestos básicos se le añaden el siguiente supuesto particular.

- ✓ Existe una función de producción Cobb-Douglas.

**Análisis**

Puesto que se asume el supuesto tecnológico neutral a lo *Harrod*

$$Y_t = F(K_t, B_{(t)}L_t)$$

Se asume que existe una función de producción *Cobb-Douglas.*

$$Y_t = K_t^{\alpha}.(B_{(t)}L_t)^{\beta} \ldots (FP)$$

$$\text{s.a} \begin{cases} \text{Rendimiento decreciente} \\ \text{Rendimientos a escala constante } \ \alpha + \beta = 1 \end{cases}$$

Donde:

$B_{(t)}$ : Factor aumentativo de la eficiencia de trabajo.

$B_{(t)}L_t$ : Fuerza de trabajo eficiente.

$\alpha$ : Elasticidad del producto respecto al capital.

$\beta$ : Elasticidad del producto respecto al trabajo eficiente.

$Y_t$ : Producto agregado.

$K_t$ : Stock de capital.

$L_t$ : Fuerza de trabajo agregada.

Dividiendo la función de producción entre el trabajo eficiente ($B_{(t)}L_t$).

$$\frac{Y_t}{B_{(t)}L_t} = \frac{K_t^{\alpha}}{[B_{(t)}L_t]^{\alpha}}.\frac{B_{(t)}L_t)^{\beta}}{[B_{(t)}L_t]^{\alpha-1}} \Rightarrow \frac{y_t}{B_{(t)}} = \left(\frac{k_t}{B_{(t)}}\right)^{\alpha}$$

$$\bar{y}_t = \bar{k}_t^{\alpha} \ldots (FPI) \Rightarrow y_t^e = (k_t^e)^{\alpha}$$

Donde:

El superíndice $\{e\}$ de las variables en unidades eficientes.

### 3.3.2 Ecuación fundamental de *Solow-Swan* con progreso exógeno y desincorporado

De la condición de equilibrio macroeconómico sabemos:

$$F(K_t, B_{(t)}L_t) = \underbrace{C_t} + \underbrace{I_t}$$

$$F(K_t, B_{(t)}L_t) = (1-s).F(K_t, B_{(t)}L_t) + \dot{K}_t + \delta.K_t$$

$$0 = -s.F(K_t, B_{(t)}L_t) + \dot{K}_t + \delta.K_t \ldots \times \frac{1}{B_{(t)}.L_t}$$

$$0 = -s.f(k_t^e) + \dot{k}_t^e + \delta.k_t^e$$

Despejando $\dot{k}_t^e$, tenemos:

$$\dot{k}_t^e = s.f(k_t^e) - \delta.k_t^e \ldots (I)$$

Para saber el comportamiento de $k_t^e$, calcularemos su derivada con respecto al tiempo

$$\frac{\partial k_t^e}{\partial t} = \frac{\partial [K_t / B_{(t)} L_t]}{\partial t} = \frac{\dot{K}_t . B_{(t)} L_t - K_t . B_{(t)} \dot{L}_t - K_t . \dot{B}_{(t)} L_t}{\left(B_{(t)} L_t\right)^2}$$

$$\frac{\partial k_t^e}{\partial t} = \underbrace{\frac{\dot{K}_t}{B_{(t)} L_t}} - \underbrace{\frac{\dot{L}_t}{L_t}} . \underbrace{\frac{K_t}{B_{(t)} L_t}} - \underbrace{\frac{\dot{B}_{(t)}}{B_{(t)}}} . \underbrace{\frac{K_t}{B_{(t)} L_t}}$$

$$\frac{\partial k_t^e}{\partial t} = \dot{k}_t^e - n.k_t^e - m_L.k_t^e \ldots (II)$$

Reemplazando $\dot{k}_t^e$, que lo hallamos en la ecuación $(I)$ y reemplazando la FPI de nuestro modelo tendremos:

$$\frac{\partial k_t^e}{\partial t} = \dot{k}_t^e - n.k_t^e - m_L.k_t^e \ldots (II)$$

$$\frac{\partial k_t^e}{\partial t} = s.f(k_t^e) - (n + \delta + m_L).k_t^e$$

$$\frac{\partial k_t^e}{\partial t} = s.\left[k_t^e\right]^\alpha - (n + \delta + m_L).k_t^e$$ *, la ecuación fundamental de Solow-Swan con progreso tecnológico.*

Es una ecuación diferencial que refleja la dinámica de la acumulación de capital en una economía capitalista con progreso tecnológico.

### 3.3.3 Estado de crecimiento proporcionado

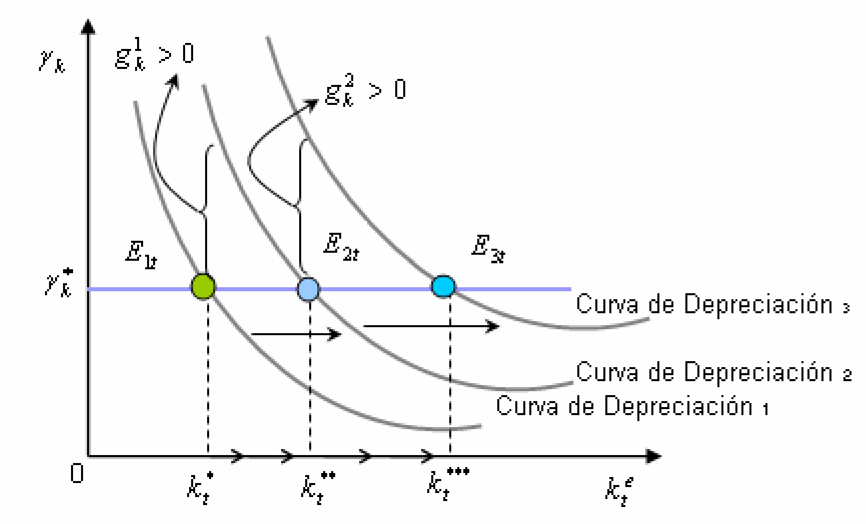
La tasa de crecimiento per cápita a largo plazo es positiva cuando la tecnología mejora de forma continua.
Existe un estado de crecimiento proporcionado, en donde la tecnología debe estar multiplicando el factor trabajo, esto quiere decir que la tecnología hace más eficiente el trabajo.[33]

Imaginemos que la tecnología mejora como se puede apreciar en el Gráfico [3.5], donde la curva de ahorro se ubica en el equilibrio ($E_{1t}$) y se desplaza a la derecha hasta interceptarse con la curva de depreciación hasta el punto de equilibrio ($E_{2t}$) y si el crecimiento con una tasa de crecimiento positiva es continuo se ubicara en ($E_{3t}$) con un capital por trabajador $k_t^{***}$[34].

[33] Revise *Sala-i-Martín*(1994) "Apuntes de Crecimiento Económico" Editorial: Antoni Bosch, pp. 39-43

[34] Si a largo plazo no existe un nuevo aumento de B(t) la economía converge a un estado proporcionado con un stock de capital superior, pero con crecimiento nulo.

**Gráfico [3.5]: Versión de *Barro* aumento de la tecnología**




En el estado de crecimiento proporcionado se tiene que $\frac{\partial k_t^e}{\partial t}$ es nulo.

Si $\frac{\partial k_t^e}{\partial t} = 0$, entonces $s.(k_t^e)^\alpha = (n + m_L + \delta).k_t^e$, se determina el capital por trabajador en estado de crecimiento proporcionado $(k_t^e)^\alpha$.

$$\left(\frac{s}{n + m_L + \delta}\right) = \frac{k^e}{(k_t^e)^\alpha} \Rightarrow \left(\frac{s}{n + m_L + \delta}\right) = (k_t^e)^{1-\alpha}$$

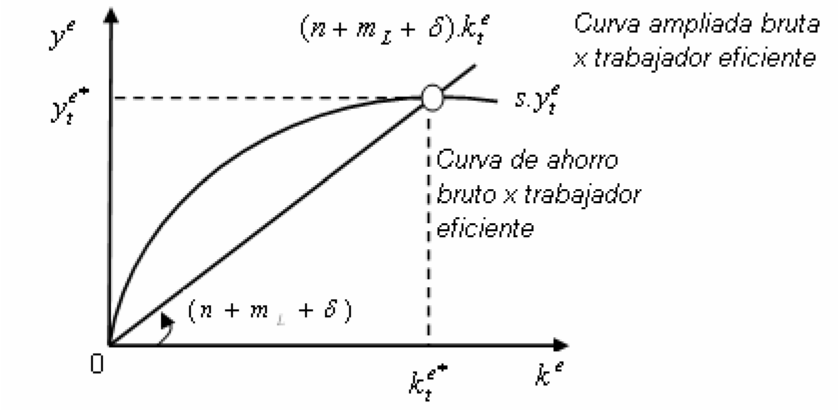
$$(k_t^e)^* = \left(\frac{s}{n + m_L + \delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

De la función de producción intensiva se tiene $y_t^e = (k_t^e)^\alpha$, si reemplazamos en la ecuación anterior tenemos:

$$(y_t^e)^* = \left(\frac{s}{n + m_L + \delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

**Donde**
Asterisco denota el valor de equilibrio de las variables

**Gráfico [3.6]: Diagrama con tecnología**




**Versión de *Barro***

De la ecuación fundamental de *Solow* – *Swan* dividimos entre el capital por trabajador eficiente $k_t^e$.

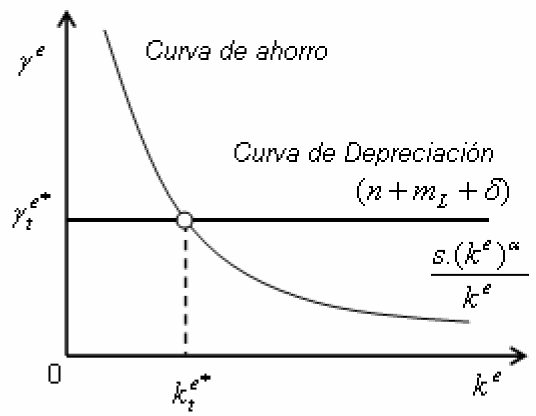
$$\underbrace{\frac{1}{k_t^e}.\frac{dk_t^e}{dt}}_{\gamma_k^e} = \frac{s(k_t^e)^\alpha}{k_t^e} - (n+m_L+\delta)\frac{k_t^e}{k_t^e}$$

$$\gamma_k^e = \frac{s(k_t^e)^\alpha}{k_t^e} - (n+m_L+\delta)\frac{k_t^e}{k_t^e}$$

En el crecimiento proporcionado de largo plazo, la tasa de crecimiento de capital es nula esto quiere decir que $\gamma_k^{LP^e} = 0$.

Si $\gamma_k^e = 0$ entonces $\frac{s(k_t^e)^\alpha}{k_t^e} = (n+m_L+\delta)\frac{k_t^e}{k_t^e}$, esta ecuación determina el capital por trabajador en equilibrio ($k_t^{e*}$) como se aprecia en el gráfico [3.7].

**Gráfico [3.6]: Gráfico de la versión de *Barro***



### 3.3.4 *Política de crecimiento ejercicios resueltos*

**Problema #1**

Su Suponga que existe una economía capitalista cuya función de producción dinámica: $Y_t = K_t^{1/2}\left[B_{(t)}L_t\right]^{1/2}$ y se sabe que la tasa de ahorro de esta sociedad es de 24% del producto agregado cada año, también se sabe que la tasa de depreciación del capital es de 5% al ano, la tasa de crecimiento de la fuerza de trabajo es del 1.5% y por ultimo se sabe que la tasa de progreso tecnológico debido a la eficiencia del trabajo es de 1.5% al año.

a) Hallar la ecuación fundamental de *Solow – Swan* con progreso tecnológico.
b) Determinar el estado de crecimiento proporcionado con su respectivo gráfico.
c) Hallar los valores de equilibrio por unidad de trabajo eficiente.
d) Hallar la tasa de salario y la tasa de rendimientos bruto de l capital y graficar los valores.
e) Hallar la participación de los salarios y de los beneficios brutos en el ingreso nacional.

**Rpt:**

a) Hallar la ecuación fundamental de *Solow – Swan* con progreso tecnológico.

De los datos tenemos $s = 24, \delta = 0.05, n = 1.5\%, m_L = 1.5\%$

$Y_t = K_t^{1/2}\left[B_{(t)}L_t\right]^{1/2}$, dividiendo a la función de producción entre la cantidad de trabajadores eficientes $B_{(t)}L_t$

$$\frac{Y_t}{B_{(t)}L_t} = \frac{K_t^{1/2}}{\left(B_{(t)}L_t\right)^{1/2}}\left[\frac{B_{(t)}L_t}{B_{(t)}L_t}\right]^{1/2} \quad \Longrightarrow \quad y_t^e = \frac{K_t^{1/2}}{\left(B_{(t)}L_t\right)^{1/2}} \Rightarrow y_t^e = (k_t^e)^{1/2} \ldots (FPI)$$

De la condición de equilibrio macroeconómico sabemos:

$$F(K_t, B_{(t)}L_t) = C_t + I_t$$

$$F(K_t, B_{(t)}L_t) = (1-s)F(K_t, B_{(t)}L_t) + \dot{K}_t + \delta K_t$$

Dividiendo entre la cantidad de trabajadores eficientes

$$0 = -sF(K_t, B_{(t)}L_t) + \dot{K}_t + \delta K_t \ldots \frac{1}{B_{(t)}L_t}$$

$$0 = -sf(k_t^e) + \dot{k}_t^e + \delta k_t$$

Despejando $\dot{k}_t^e$, tenemos:

$$\dot{k}_t^e = sf(\dot{k}_t^e) - \delta\, \dot{k}_t^e \ldots (I)$$

Para saber el comportamiento de $k_t^e$, calcularemos su derivada con respecto al tiempo

$$\frac{\partial k_t^e}{\partial t} = \frac{\partial\left[K_t / B_{(t)}L_t\right]}{\partial t} = \frac{\dot{K}_t . B_{(t)}L_t - K_t . B_{(t)}L_t - K_t . \dot{B}_{(t)}\, L_t}{\left(B_{(t)}L_t\right)^2}$$

$$\frac{\partial k_t^e}{\partial t} = \frac{\dot{K}_t}{\underbrace{B_{(t)}L_t}} - \frac{\dot{L}_t}{\underbrace{L_t}} . \frac{K_t}{\underbrace{B_{(t)}L_t}} - \frac{\dot{B}_{(t)}}{\underbrace{B_{(t)}}} . \frac{K_t}{\underbrace{B_{(t)}L_t}}$$

$$\frac{\partial k_t^e}{\partial t} = \dot{k}_t^e - n.k_t^e - m_L.k_t^e \ldots (II)$$

Reemplazando $\overset{\bullet}{k}{}_t^e$, que lo hallamos en la ecuación (I) y reemplazamos en la FPI de nuestro modelo tenemos:

$$\frac{\partial k_t^e}{\partial t} = \overset{\bullet}{k}{}_t^e - n.k_t^e - m_L.k_t^e \ldots(II)$$

$$\frac{\partial k_t^e}{\partial t} = sf(k_t^e) - (n + m_L + \delta).k_t^e$$

Nos da la ecuación fundamental de *Solow – Swan* con progreso tecnológico.

$$\frac{\partial k_t^e}{\partial t} = s(k_t^e)^{\alpha} - (n + m_L + \delta).k_t^e \ldots(III)$$

Reemplazando los datos en la ecuación (III)

$$\frac{\partial k_t^e}{\partial t} = 0.24(k_t^e)^{1/2} - 0.08k_t^e$$, *la ecuación fundamental con progreso tecnológico*

b) En el estado de crecimiento proporcionado se obtiene dividiendo la ecuación anterior (ecuación fundamental de *Solow - Swan*) entre el capital por trabajador eficiente e igualándolo a la tasa de crecimiento que es nula $\gamma_k^e = 0$.

$$\frac{1}{k_t^e}.\frac{\partial k_t^e}{\partial t} = \frac{0.24(k_t^e)^{1/2}}{k_t^e} - 0.08 \quad \Rightarrow \quad \gamma_k^e = \frac{0.24(k_t^e)^{1/2}}{k_t^e} - 0.08$$

Donde la tasa de crecimiento del capital es nula $\gamma_k^e = 0$. En el estado proporcionado esta dado por la siguiente ecuación:

$$0 = \frac{0.24(k_t^e)^{1/2}}{k_t^e} - 0.08$$

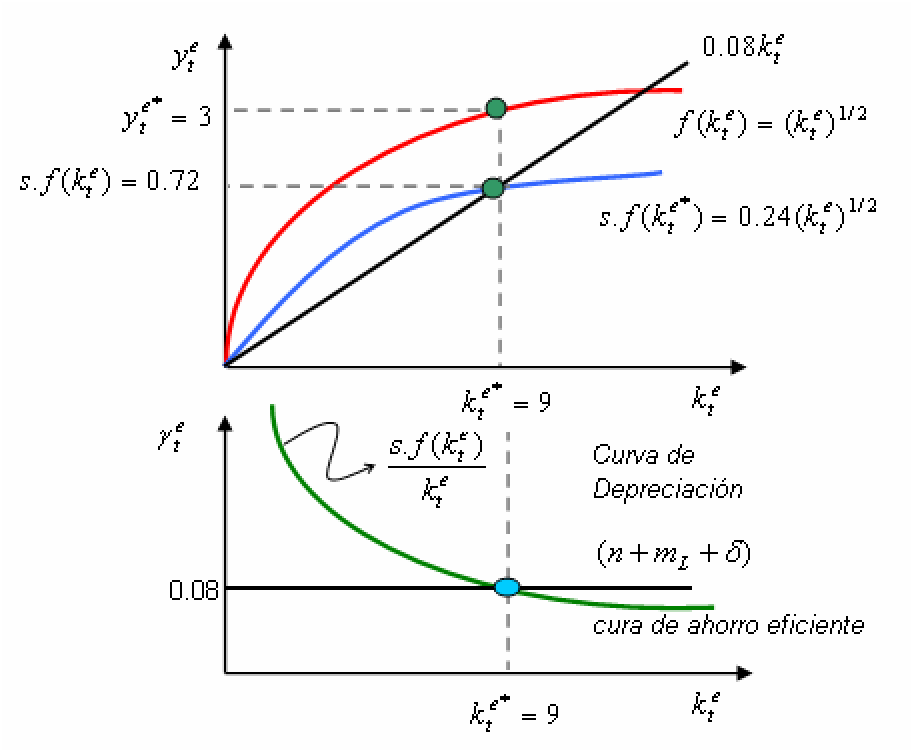
c) Hallar los valores de equilibrio por unidad de trabajo eficiente.

$$\frac{0.24(k_t^e)^{1/2}}{k_t^e} = 0.08 \quad \Rightarrow \quad k_t^{e^*} = 9$$

Remplazando $k_t^{e^*}$, en la FPI tenemos el producto por trabajador eficiente:

$$y_t^e = (9)^{1/2} \Rightarrow \quad y_t^{e^*} = 3$$

**Gráfico del problema #1**




d) Hallar la tasa de salario y la tasa de rendimientos bruto de l capital y graficar los valores.

**Mercado de capital:**

$$Pmgk = R^e \Rightarrow Pmgk = \frac{d\left(k_t^{1/2}\right)}{dk_t} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}\right)^{1/2} \quad \Longrightarrow \quad R^r = 0.16666$$

**Mercado de trabajo:**

$$pmgL = W^e \Rightarrow Pmgk = f(k_t^e) - f'(k_t^e).k_t^e \Rightarrow W^e = (k_t^e)^{1/2} - \frac{1}{2}.\frac{1}{k_t^{1/2}}.k_t$$

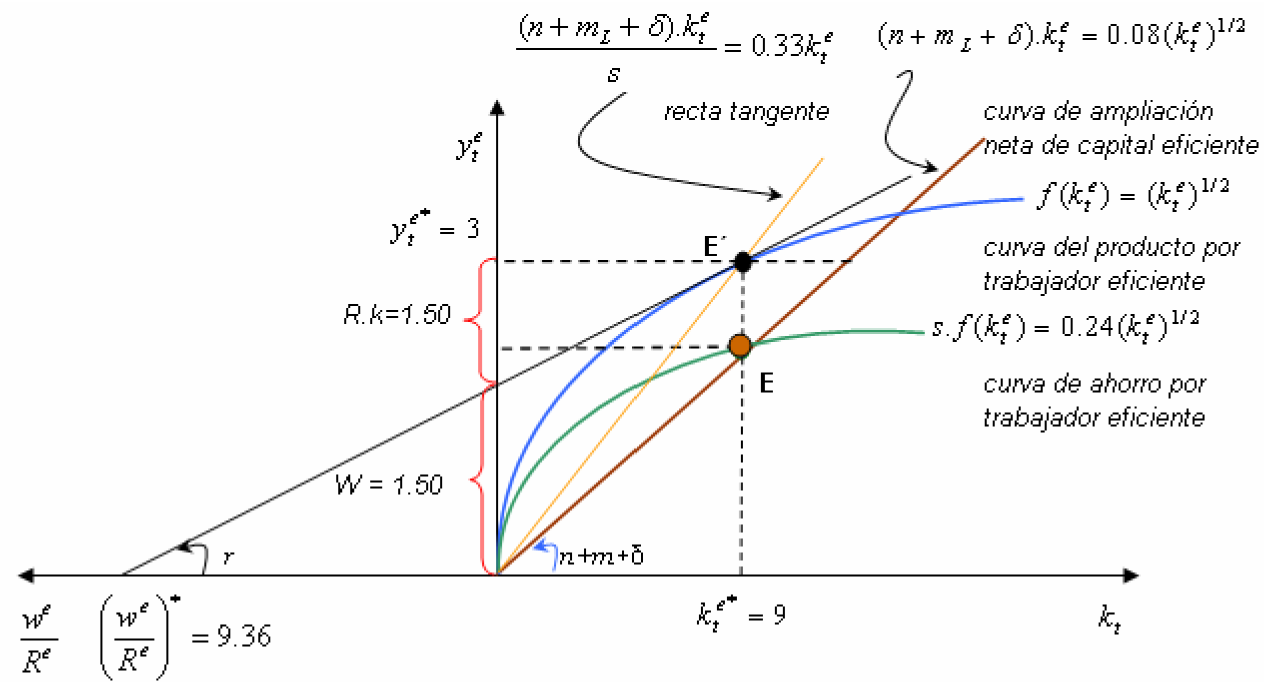
$$W^e = \frac{1}{2}k_t^{1/2} \Rightarrow W^e = \frac{1}{2}(9)^{1/2} \quad \Longrightarrow \quad W^e = 1.5$$

e) Hallar la participación de los salarios y de los beneficios brutos en el ingreso nacional.

$\frac{w^e}{y^e} = \frac{W}{Y} = \frac{1.5}{3} = 0.5 \approx 50\%$, la participación del beneficio en el ingreso nacional es del 50%.

La participación del beneficio:
$\frac{R^e k^e}{y^e} = \frac{B}{Y} = \frac{(0.16666)x9}{3} = 0.498 \approx 50\%$, la participación del beneficio en el ingreso nacional es del 50%.

**Gráfico de la distribución del ingreso nacional**




## Problema #2

Examine el impacto de un aumento permanente en la tasa de inversión sobre el crecimiento de la economía en el modelo de *Solow – Swan* con progreso tecnológico.

**Rpt:**

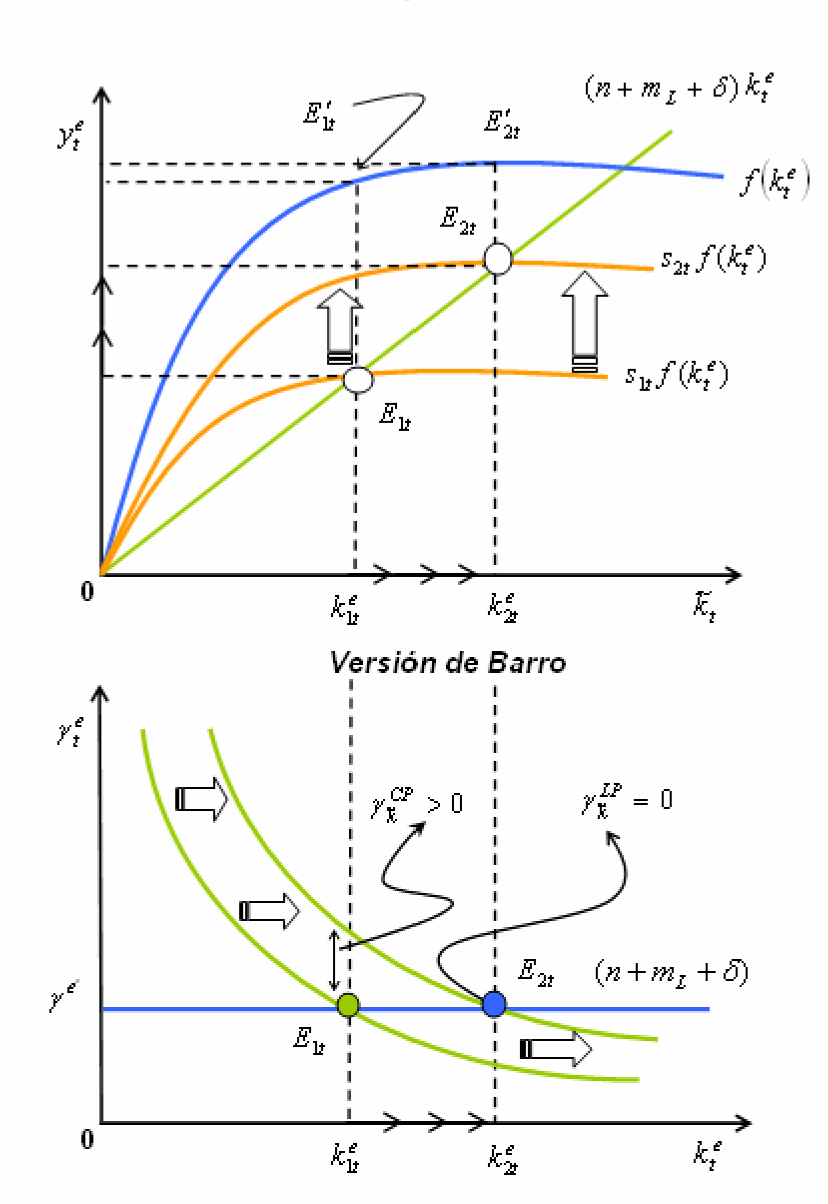
Como en la economía se decidido aumentar de forma permanente la tasa de inversión, desde "$s_{1t}$ " hasta "$s_{2t}$ ". La respuesta de esta economía como se puede ver el gráfico del problema #2.

Que el aumento de la inversión se desplaza en forma ascendente de $s_{1t}.f(k_{1t}^{e})$ hasta la curva, llegando al equilibrio $E_{2t}$, con esto la nueva inversión $(k_{2t}^{e})$ supera a la inversión anterior por trabajado eficiente, esto significa que la economía comienza de nuevo la profundización, hasta llegar a igualarse $s_{2t}f(k_{2t}^{e}) = (n + m_L + \delta)k_{2t}^{e}$.

Por lo que la función de producción eficiente llega a un valor más alto que el capital por trabajador eficiente con una producción per -capita más alta.

$$s.f(k_{2t}) = (n + m_L + \delta).k_{2t} \quad \Rightarrow \quad \frac{d(f(k_{2t}))}{dt} = k_{2t}^{*} > 0 \qquad \text{Donde } k_{1t}^{*} < k_{2t}^{*}$$

**Gráfico del problema #2**




$$\frac{\uparrow s.f(k_t^e)}{k_t^e} - (n + m_L + \delta) = \gamma_t^e > 0$$

Si $\Delta s > 0$

$$\uparrow k_t^e = \left(\frac{\uparrow s}{n + m_L + \delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \wedge \uparrow y_t^e = \left(\frac{\uparrow s}{n + m_L + \delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

**Problema #3**

Suponga que existe una economía capitalista cuya función de producción agregada es $Y_t = K_t^{5/9}\left[B_{(t)}L_t\right]^{4/9}$, y se sabe que la tasa de ahorro de esta sociedad es de 36% del producto agregado cada año, también se sabe que; La tasa de depreciación del capital es de 8% al año, la tasa de crecimiento de la fuerza de trabajo es del 2% al año y por ultimo se sabe que la tasa de progreso tecnológico debido a la eficiencia del trabajo es de 2% al año.

a) Hallar la ecuación fundamental de *Solow* – *Swan* con progreso tecnológico.
b) Determine el estado de crecimiento proporcionado.
c) Halle el valor de equilibrio de capital por unidad trabajo eficiente y del producto por unidad eficiente y graficar.
d) Halle la remuneración de los factores.
e) Hallar la participación de los salarios y de los beneficios brutos en el ingreso nacional y por ultimo grafique todos los datos encontrados en un solo gráfico.

**Rpt:**

a) De los datos tenemos: $s = 0.36, \delta = 0.08, n = 2\%, m_L = 2\%$

$Y_t = K_t^{5/9}\left[B_{(t)}L_t\right]^{4/9}$, dividiendo la función de producción entre la cantidad de trabajadores eficientes $B_{(t)}L_t$, tenemos:

$$\frac{Y_t}{B_{(t)}L_t} = \frac{K_t^{15/9}}{\left(B_{(t)}L_t\right)^{5/9}}\left[\frac{B_{(t)}L_t}{B_{(t)}L_t}\right]^{4/9} \qquad y_t^e = \frac{K_t^{4/9}}{\left(B_{(t)}L_t\right)^{49}} \Rightarrow y_t^e = (k_t^e)^{5/9}\ldots(FPI)$$

De la condición de equilibrio macroeconómico sabemos:

$$F(K_t, B_{(t)}L_t) = C_t + I_t$$

$$F(K_t, B_{(t)}L_t) = (1-s)F(K_t, B_{(t)}L_t) + \dot{K}_t + \delta K_t$$

Dividiendo entre la cantidad de trabajadores eficientes

$$0 = -sF(K_t, B_{(t)}L_t) + \dot{K}_t + \delta K_t \ldots \frac{1}{B_{(t)}L_t}$$

$$0 = -sf(k_t^e) + \dot{k}_t^e + \delta k_t$$

Despejando $\dot{k}_t^e$, tenemos:

$$\dot{k}_t^e = sf(\dot{k}_t^e) - \delta\,\dot{k}_t^e \ldots(I)$$

Para saber el comportamiento de $k_t^e$, calcularemos su derivada con respecto al tiempo

$$\frac{\partial k_t^e}{\partial t} = \frac{\partial\left[K_t / B_{(t)}L_t\right]}{\partial t} = \frac{\dot{K}_t . B_{(t)}L_t - K_t . B_{(t)}\dot{L}_t - K_t . \dot{B}_{(t)}\, L_t}{\left(B_{(t)}L_t\right)^2}$$

$$\frac{\partial k_t^e}{\partial t} = \frac{\dot{K}_t}{B_{(t)}L_t} - \frac{\dot{L}_t}{L_t} . \frac{K_t}{B_{(t)}L_t} - \frac{\dot{B}_{(t)}}{B_{(t)}} . \frac{K_t}{B_{(t)}L_t}$$

$$\frac{\partial k_t^e}{\partial t} = \dot{k}_t^e - n.k_t^e - m_L.k_t^e \ldots(II)$$

Reemplazando $\dot{k}_t^e$, que lo hallamos en la ecuación (I) y reemplazamos en la FPI de nuestro modelo tenemos:

$$\frac{\partial k_t^e}{\partial t} = \overset{\bullet}{k}{}_t^e - n.k_t^e - m_L.k_t^e \ldots(II)$$

$$\frac{\partial k_t^e}{\partial t} = sf(k_t^e) - (n + m_L + \delta).k_t^e$$

Nos da la ecuación fundamental de *Solow – Swan* con progreso tecnológico.

$$\frac{\partial k_t^e}{\partial t} = s(k_t^e)^{\alpha} - (n + m_L + \delta).k_t^e \ldots(III)$$

Reemplazando los datos en la ecuación (III)

$$\frac{\partial k_t^e}{\partial t} = 0.36(k_t^e)^{5/9} - 0.12k_t^e$$ , *la ecuación fundamental con progreso tecnológico*

b) En el estado de crecimiento proporcionado se obtiene dividiendo la ecuación anterior (ecuación fundamental de *Solow - Swan*) entre el capital por trabajador eficiente e igualándolo a la tasa de crecimiento que es nula $\gamma_k^e = 0$.

$$\frac{1}{k_t^e}.\frac{\partial k_t^e}{\partial t} = \frac{0.36(k_t^e)^{5/9}}{k_t^e} - 0.12 \Rightarrow \gamma_k^e = \frac{0.36(k_t^e)^{5/9}}{k_t^e} - 0.12$$

Donde la tasa de crecimiento del capital es nula $\gamma_k^e = 0$. En el estado proporcionado esta dado por la siguiente ecuación:

$$0 = \frac{0.36(k_t^e)^{5/9}}{k_t^e} - 0.12$$

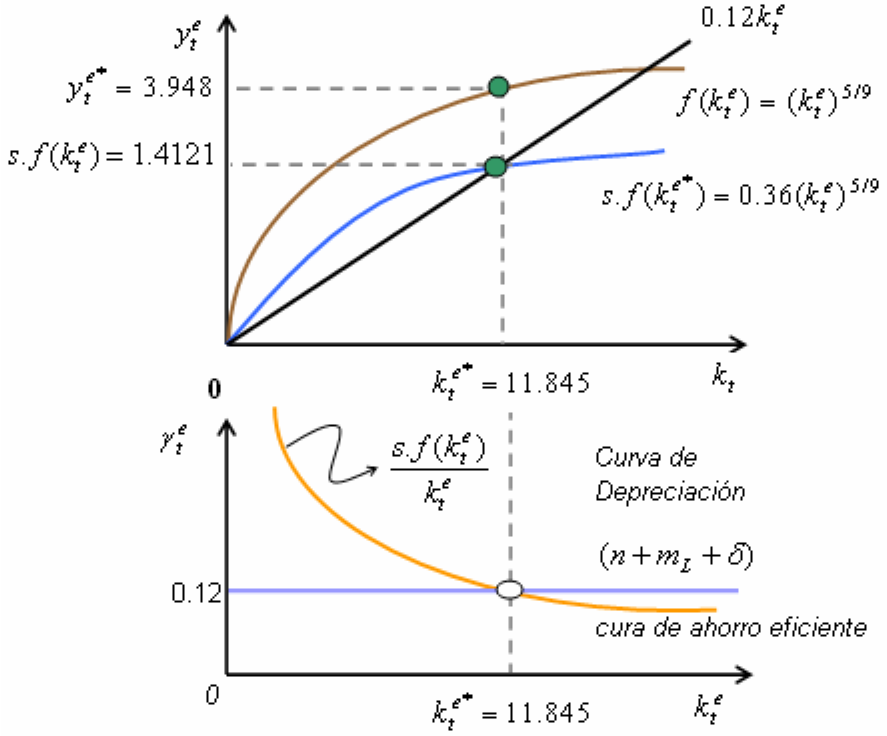
c) Hallar los valores de equilibrio por unidad de trabajo eficiente.

$$\frac{0.36(k_t^e)^{5/9}}{k_t^e} = 0.12 \Rightarrow k_t^{e^*} = 11.845$$

Remplazando $k_t^{e^*}$, en la FPI tenemos el producto por trabajador eficiente:

$$y_t^e = (11.845)^{5/9} \Rightarrow \quad y_t^{e^*} = 3.948$$

**Gráfico del problema #3**




d) Hallar la tasa de salario y la tasa de rendimientos bruto de l capital y graficar los valores.

**Mercado de capital:**

$$Pmgk = R^e \Rightarrow Pmgk = \frac{d\left(k_t^{5/9}\right)}{dk_t} = \frac{5}{9}\left(\frac{1}{k_t}\right)^{4/9} \Rightarrow \quad R^r = 0.1852$$

**Mercado de trabajo:**

$$pmgL = W^e \Rightarrow Pmgk = f(k_t^e) - f'(k_t^e).k_t^e \Rightarrow W^e = (k_t^e)^{5/9} - \frac{5}{9}.\frac{1}{k_t^{4/9}}.k_t$$

$$W^e = \frac{4}{9}k_t^{5/9} \Rightarrow W^e = \frac{4}{9}(11.845)^{5/9} \Rightarrow \quad W^e = 1.754$$

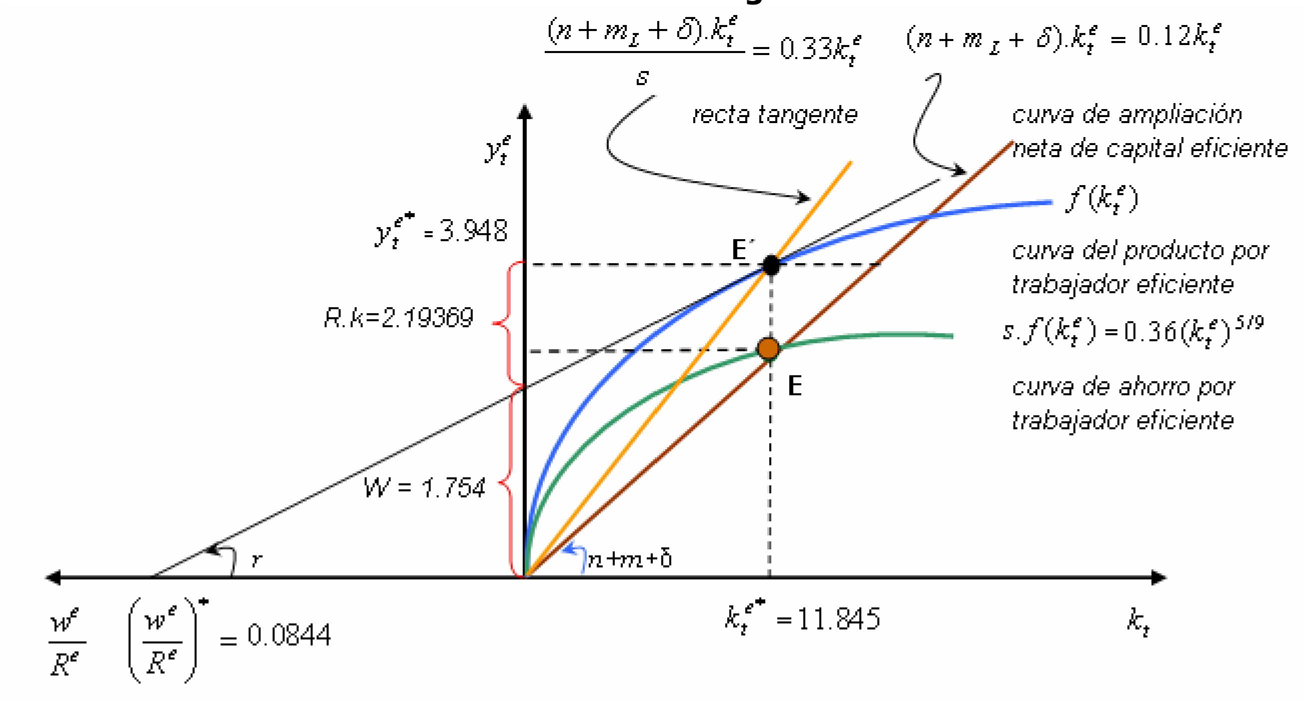
e) Hallar la participación de los salarios y de los beneficios brutos en el ingreso nacional.

$\frac{w^e}{y^e} = \frac{W}{Y} = \frac{1.754}{3.948} = 0.445 \approx 50\%$, la participación del beneficio en el ingreso nacional es del 44.5%.

La participación del beneficio:

$\frac{R^e k^e}{y^e} = \frac{B}{Y} = \frac{(0.1852)x11.845}{3.948} = 0.555 \approx 55.5\%$, la participación del beneficio en el ingreso nacional es del 55.5%.

**Gráfico de la distribución del ingreso nacional**




**Problema #4**

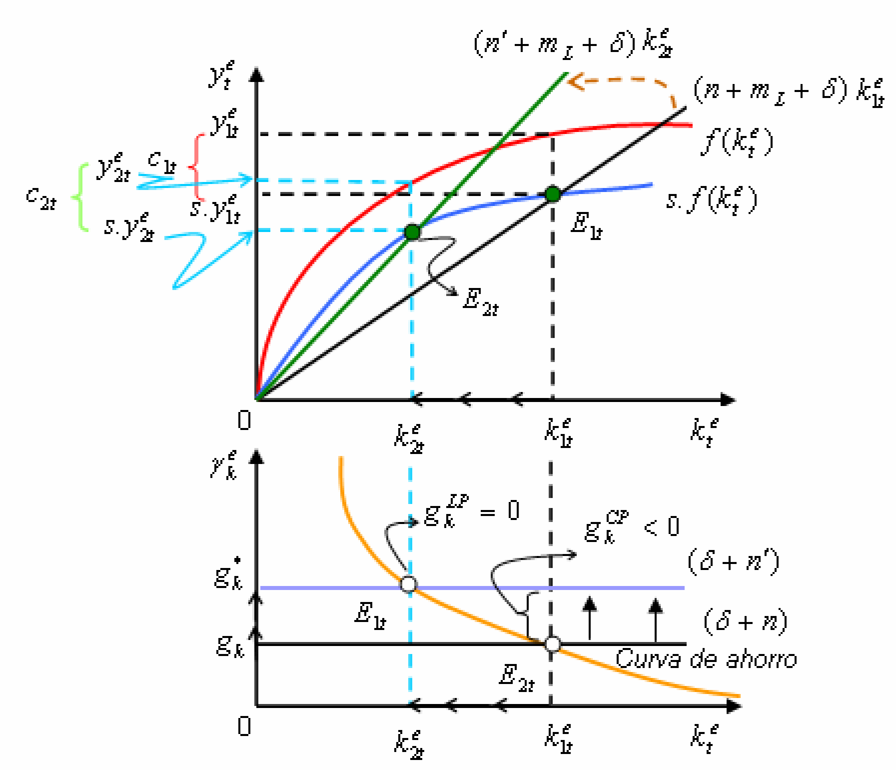
Imaginemos en el país "A" se ha producido un aumento de la población debido a la no planificación familiar esto ha aumentado la tasa de crecimiento poblacional, considerablemente, y debido a estos se quiere analizar este aumento permanente de la tasa de crecimiento de la población, sobre el crecimiento de su economía.

**Rpt:**

Un aumento permanente de la tasa se crecimiento de la población ($n'$), la curva de ampliación de capital rota en sentido antihorario, de tal modo que cuando se Intercepta con la curva de ampliación neta de capital determina el nuevo estado de crecimiento proporcionado, con menor capital ($k_{2t}^e$) y menor producto por trabajador ($y_{2t}^e$), como se puede ver en el gráfico del problema #4.

En el corto plazo el capital por trabajador eficiente comienza a disminuir, como se puede apreciar en la versión de *Barro*, teniendo una tasa de crecimiento negativa, hasta llegar el equilibrio ($E_{2t}$) donde la tasa de crecimiento proporcionado es nula. También podemos apreciar en la grafica que con mayor "$n$" se obtiene un nuevo consumo por trabajador eficiente ($c_{2t}$), y un nuevo ingreso per cápita por trabajador ($k_{2t}^e$ ).

**Gráfico del problema #4**



$$\frac{sf(k_t^e)}{k_t^e} - (n + m_L + \delta) = \gamma_t^e < 0$$

Si $\Delta n > 0$

$$\downarrow k_t^e = \left(\frac{s}{\uparrow n + m_L t}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \wedge \downarrow y_t^e = \left(\frac{s}{\uparrow n + m + \delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Por lo tanto una aumento de la tasa crecimiento de la población afecta de manera negativa al capital por trabajador eficiente, el nivel de producción por trabajador, y nos da una tasa de Crecimiento negativa.

# Capítulo IV

## Crecimiento con progreso tecnológico y tasa de ahorro endógena

*“El enunciado de una ley es un resultado de la inteligencia, una síntesis del esfuerzo de la razón ilustrada para establecer regularidades que se detectan en la realidad natural, cultural o social. Las leyes no son necesariamente causales y tampoco requieren o exigen una explicación causal”*

*Bunge* (1959)

## 4.1 *Modelo de Hicks*

Sir *John R. Hicks* economista, británico ganador del *premio Nobel de Economía en 1972,* junto Arrow Kenneth, por sus teorías sobre el equilibrio general económico y el bienestar. Hicks nos plantea un modelo con progreso tecnológico inducido por los precios relativos de los factores.

Nos plantea en una economía capitalista va existir un incremento de los precios de los factores si existe progreso tecnológico

### 4.1.1 Planteamiento

En una economía capitalista, en el cual tienen determinada dotación de factores de producción y un determinado nivel de tecnología, tendrá un de terminado precio relativo de los factores. Ante una determinada escasez de un factor de producción, esto quiere decir que dicho factor de producción se encarece elevando su precio relativo de lo factores, lo cual genera un estimulo a un progreso tecnología o endógeno que ahorre tal factor de producción que se ha encarecido relativamente.

### 4.1.2 Proposición / Aplicaciones

**Precio del petróleo**

Un ejemplo es el petróleo que en 1973 cuadruplico su precio pasando de 3 dólares el barril a 12 dólares, esto fue ocasionado por la escasez del petróleo.
Como plantea Hicks si existe un estimulo económico para generar un progreso tecnológico ahorrador de petróleo generara: Autos más pequeños con menor consumo de petróleo, creación de motores de cuatro cilindros y desarrollo de energías alternativas (energía solar, eolica, biocombustible, atómica, gasifera, etc.).

**Agricultura de EEUU**

Agricultura de granjeros donde hay abundancia de tierra y capital y escasez de mano de obra. Elevado precio relativo de los salarios en relación de los servicio de otros factores, se propiciar la mecanización del agro y esto genera una intensificación del capital.

**Agricultura de de Japón**

En este país existe escasez de tierra de cultivo, pero existe abundancia de capital y de mano de obra, existe un relativo encarecimiento de la renta por el factor respecto a las otras retribuciones de los factores de producción.

**Agricultura de Perú**

La agricultura de la costa de Perú presenta escasez de tierras de regadío, escasez de agua, abundancia relativa de capital y escasez de mano de obra. Hicks nos dice que existe un estimulo para generar un progreso tecnológico intensivo en capital y ahorrador de agua.

**Agricultura de la Sierra**

En el caso de la selva existe abundancia de tierras de secano, escasez de tierras de regadío, abundancia de mano de obra y escasez de capital.
Hicks nos dice si se da un estimulo económico para generar un progreso tecnológico ahorrador de tierras de regadío e intensiva mano de obra. Traerá como benéficos: semillas mejoradas, nuevos f fertilizantes y camellones (chacras hundidas que tiene la forma de lomo de un camello de hay el nombre).

**Agricultura de la selva**

En el caso de la selva donde existe abundancia de recursos naturales, existe escasez de tierras de regadío, la tierra es pobre para la agricultura recordando que también hay abundancia forestal que dificulta la agricultura.

## 4.2 *Modelo de Aprendizaje de Arrow*

El modelo de Arrow (1962) de *Learning by Doing* (LBD) resulta ser la herramienta de partida para analizar la relación entre la edad media de las máquinas y la tasa de crecimiento: Arrow introduce progreso técnico endógeno en una tecnología de vintage.

Para probar su teoría Arrow va visitar una fabrica de aviones y va a estudiar la evolución del fuselaje, en ella encuentra que la relación de fuselaje, para producir el fuselaje de un avión en términos de ahorras de trabajo estaba en una relación inversa con la producción de dichos fuselaje. Por este y otros trabajo Arrow gano el *Premio Nobel de Economía en 1972.*

El inconveniente para nuestros objetivos es que el supuesto clave del modelo de Arrow permite la agregación de máquinas de distintas edades. En efecto, cuando los nuevos equipos realizan la misma contribución al stock de conocimientos que los equipos heredados del pasado remoto, como ocurre en el modelo de Arrow, la heterogeneidad temporal sencillamente se omite, al menos si se acepta como en Romer (1986) que el stock de conocimiento también se deprecia.[35]

En este artículo desarrollamos los fundamentos de la teoría del crecimiento endógeno con vintage capital a partir de estos antecedentes, y con el objetivo de mejorar nuestra comprensión del papel que juega la edad del capital en el crecimiento. En primer lugar, se introduce una versión ampliada del modelo de Arrow de LBD que anida las distintas variantes que se discuten en el artículo. A partir de este marco general se motiva el modelo AK con vintage capital, puesto que la dinámica del modelo de Arrow bajo ciertas especificaciones converge a la del modelo AK con capital homogéneo, lo que facilita la discusión acerca de las consecuencias para la dinámica de hipótesis alternativas. Además, resulta natural iniciar el análisis a partir del modelo de crecimiento endógeno más simple: el modelo AK.

Suponemos que la contribución al conocimiento de la inversión en una determinada cosecha se deprecia con la edad, entonces podemos escribir una versión ampliada del modelo de LBD de Arrow, en la que la integración respecto al tiempo no puede sustituirse por la integración con respecto al conocimiento, y que por tanto preserva la heterogeneidad del capital en el tiempo y respecto al stock de conocimientos. Nos vamos a referir al supuesto que recoge la depreciación de los efectos de la experiencia como *forgetting*, y al modelo que anida el de Arrow y con ello por tanto el modelo AK estándar como de *Learning by doing but forgetting.*[36]

[35] En un estudio posterior Romer (1986) supone implícitamente que el conocimiento se deprecia a la misma tasa que lo hace el capital, de manera que los productores de los bienes de capital olvidan el conocimiento pasado a medida que el tiempo pasa. Las dos diferencias claves del Arrow y Romer. En primer lugar, en Arrow el conocimiento y el stock de capital son diferentes conceptos, mientras que en Romer son idénticos conceptos. En segundo lugar, el progreso técnico se distribuye sobre todos los equipos en Romer, mientras que está incorporado a las nuevas máquinas en Arrow

[36] Crecimiento económico y generaciones de capital (2007) Autores: Raouf Boucekkine, Omar Lisandro y Luís A. Puch. Financiación de la Fundación Ramón Areces

### 4.2.1 Planteamiento

El número de horas de trabajo para producir un bien depende inversamente de la cantidad de producción de dicho bien.

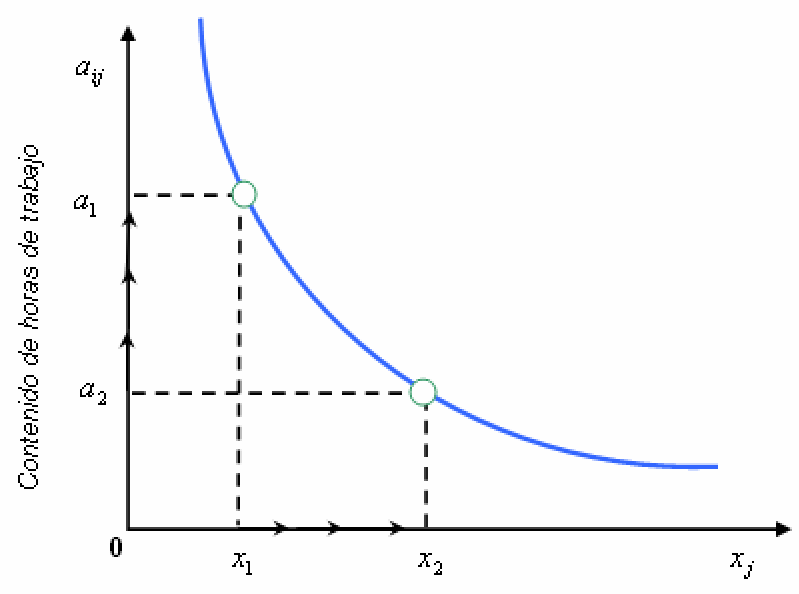
El número de horas de trabajo para producir un bien depende inversamente de la cantidad de producción de dicho bien.

$a_{ij}$ : Contenido de trabajo por unidad de producción

Obs: En los modelo de crecimiento el coeficiente técnico es un parámetro como tal, es un coeficiente fijo ahora en el modelo de *Arrow*, el coeficiente técnico deviene endógeno.

$$a_{ij} = f(x_j)$$

**Gráfico [4.1]: El aprendizaje según *Arrow***




### 4.2.2 Hipótesis

H1: El crecimiento económico depende directamente del crecimiento de la productividad del trabajo.

H2: El crecimiento de la productividad del trabajo depende directamente del aprendiz aje en el puesto de trabajo.

H3: El aprendizaje depende directamente de la experiencia de los trabajadores.

H4: La experiencia de los trabajadores depende de la cantidad de producción producida en dicho bien.

Hicks nos dice que el aumento de la producción y con ello aumenta el aprendizaje de los trabajadores, lo cual eleva el crecimiento de la productividad del trabajo.

### Inversión

La inversión privada es realizada por empresa capitalista que tiene como objetivo maximizar su beneficio.
La inversión social es la inversión de toda la sociedad. *Arrow* plantea que la inversión social es un Proxy (aproximado) de la experiencia de los trabajadores a lo largo de los años.

### El Marco general: *Learning-by-doing*

El marco general corresponde al óptimo social de una versión del modelo de Arrow (1962) de Learning by Doing. El modelo de Arrow (1962) es un precursor de los modelos de crecimiento endógeno.

Su supuesto clave es que el stock de conocimientos está asociado con Learning by Doing en el sector de bienes de capital. La producción de bienes de capital aumenta el conocimiento de los productores de dichos bienes, lo que les permite mejorar la productividad del trabajo de las nuevas máquinas. Sin embargo, la especificación de Arrow es de alguna manera muy extrema: se supone que detener la producción de bienes de capital no tiene efectos negativos sobre el stock de conocimiento de los productores.

## 4.3 La función de progreso técnico

*Kaldor* efectúa una crítica a los modelos neoclásicos de crecimiento con progreso exógeno desincorporado, y señala que es un error separar los efectos del progreso tecnológico y los efectos de la acumulación de capital, debido a que en progreso tecnológico de bienes incorpora en una nueva maquina.

### 4.3.1 Planteamiento

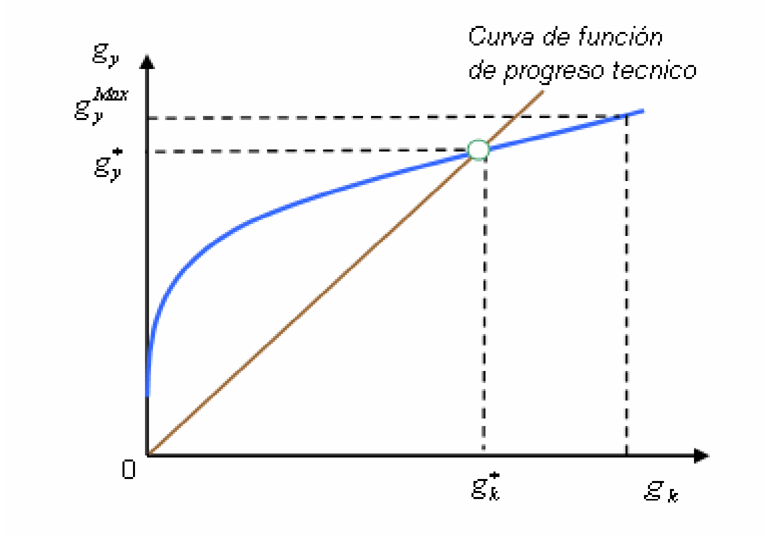
En una economía capitalista existen bienes de capital heterogéneos, y por eso el progreso tecnológico se va expresar en una nuevas maquinas, los mismo que van ampliar los bienes de capital heterogéneos.

Si los bienes de capital son heterogéneos no se puede utilizar la función de producción agregada pero si la función de producción de cada empresa. En vista de esta situación *Kaldor* formula, el planteamiento de la función de producción de progreso técnico.

### Función de progreso técnico

En una economía capitalista, donde existen bienes de capital heterogéneos y a la vez existe progreso técnico incorporado se da, que la tasa de crecimiento del producto por trabajador depende directamente de la tasa de crecimiento del capital por trabajador.

**Gráfico [4.2]: Función de progreso técnico**




### 4.3.2 Características

- ✓ La curva de progreso técnico es de magnitud positiva.
- ✓ La curva de la función de progreso técnico es cóncava hacia el eje de la abscisa.
- ✓ Tiene intercepto con la ordenada cuyo significado nos dice que existe otros factores que explican también el crecimiento de las curvas de progreso técnico y la recta de 45 grados genera:
  - o La tasa de crecimiento de capital por trabajador de equilibrio: $g_k^*$
  - o La tasa de crecimiento del producto por trabajador de equilibrio: $g_y^*$
- ✓ Existe una máxima tasa de crecimiento del producto por trabajador: $g_k^{Máx}$

# Capítulo V

## Modelos Neoclásicos de crecimiento Óptimo

*"Dadme solamente las ecuaciones de movimiento y os mostraré el futuro del universo"*

*Laplace*

En este Capítulo estudiaremos las decisiones de las familias de como toman sus decisiones de consumo y ahorro. Un supuesto del modelo neoclásico que parecía poco realista, es que en el modelo neoclásico las familias eran a la vez consumidoras y productoras, como si se tratase de *Robinson Crusoe*.

También analizaremos las decisiones que toman los agentes económicos, consumidores y empresas. Por un lado, analizaremos como las familias toman sus decisiones de consumo y ahorro. Paralelamente analizaremos las decisiones de inversión y contratación de mano de obra que hacen las empresas. El objetivo es estudiar cual es el resultado que obtiene una economía en la que dejamos que sean los consumidores los que toman sus decisiones de consumo y las empresas sus decisiones de inversión. En el contexto de esta economía estaremos preocupados por analizar cuales son los determinantes del crecimiento económico.

Como sabemos en la vida real las empresas y los consumidores son instituciones separadas que interactúan en un lugar llamado mercado. Las familias distribuyen su renta entre consumo y ahorro. Las empresas contratan trabajo a cambio de un salario y venden el producto a cambio de un precio. Empresas y familias se encuentran en el mercado y los precios del trabajo y el capital son tales que los tres mercados se vacía. (Modelo de equilibrio general de *Ramsey* (1928)).

## 5.1 Modelo de Ramsey-Cass-Koopmans

Se basa en el modelo de *Ramsey* (1928) y que, posteriormente perfecciona por *Cass* (1965) y Koopmans (1965), donde incorpora la función de producción neoclásica y va considerar también el modelo de *Solow.*

El modelo de *Ramsey-Cass-Koopmans* también es conocido como el modelo d e horizonte infinito y para los economistas, este modelo es la continuación del modelo de *Solow*, pero desarrollado en un contexto de optimización de los agentes económicos (firmas, familias). Algunas características de este modelo son: Que las firmas competitivas rentan capital y contratan trabajo para producir, un numero fijo de familias que viven por siempre, ofrecen la fuerza laboral, consumen y ahorran, excluye todas las imperfecciones de los mercados.

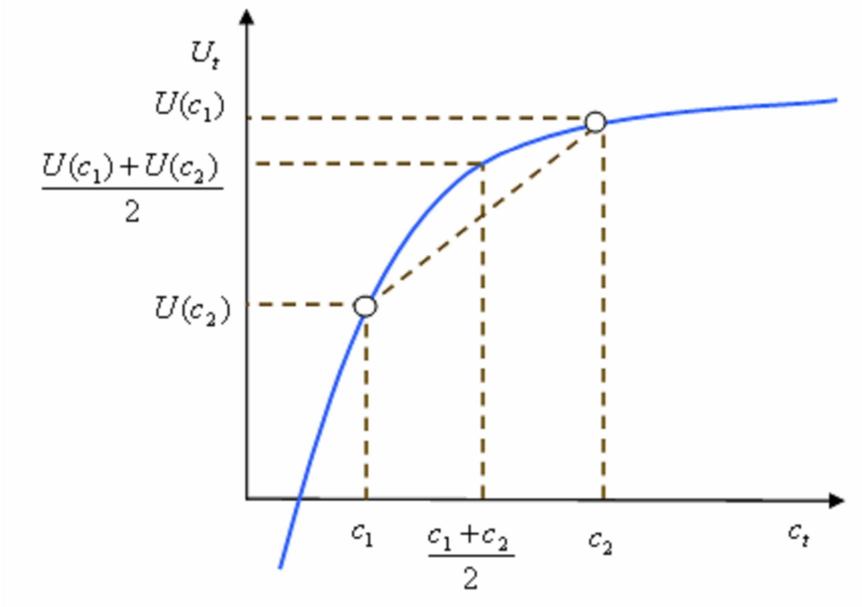
### 5.1.1 Supuestos del modelo

A los supuestos básicos del modelo de *Solow* se le añaden los siguientes supuestos:

- ✓ Existe una función neoclásica agregada de buen comportamiento.
- ✓ Las familias son consumidoras y productoras (tipo *Robinson Crusoe*).
- ✓ Las familias son de linaje y viven muchos años, esto quiere decir que los agentes de este modelo son de dinastía o familias, siendo $L_t$ la dinastía del modelo.
- ✓ Existe una función de utilidad de los individuos, que depende del consumo por trabajador $U_t = U(c_t)$.
- ✓ La magnitud de la función de utilidad marginal del consumo es positiva esto quiere decir es una función es cóncava. La concavidad de la utilidad refleja el deseo de la gente de tener trayectorias de consumo más o menos lisas o suaves en el tiempo. Que la función de utilidad sea lisa, significa que los consumidores prefieren consumir un poco cada día que consumir un poco mucho y otro nada. La relación entre concavidad de la función de utilidad y

el deseo de alisar el consumo (es decir querer consumir mas o menos lo mismo cada día) se puede apreciar en el gráfico [5.1].

**Gráfico [5.1]: Concavidad de la Utilidad**




Que la función de utilidad se cóncava quiere decir que:

$$U(c_1)+U(c_2)<U\left[\frac{c_1+c_2}{2}\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[U(c_1)+U(c_2)\right]<U\left[\frac{c_1+c_2}{2}\right]$$

$c_t = c_1 + c_2$

La utilidad derivada de consumir $c_t$, es mayor cuando el consumo total se ha repartido, que cuando no se reparte.

Sea la función utilidad[37] :

$$U(c_t)=\frac{c_t^{1-\theta}-1}{1-\theta}$$

En esta función, $\theta$ es una constante que representa el grado de concavidad de la función de utilidad. Contra mayor sea $\theta$, mayor será la concavidad de la función de utilidad, mayor serán los deseos de los agentes de suavizar el consumo en el tiempo.

Si $\theta = 0$, no querrían suavizar su consumo en el tiempo y en caso:

[37] Típicamente se usa una forma específica para la función de utilidad instantánea. Para la forma en este caso se denomina utilidad con aversión relativa al riesgo constante (ARRC).

$$U(c_1)+U(c_2)=2U\left[\frac{c_1+c_2}{2}\right]$$

- ✓ La curva de utilidad marginal es decreciente.
- ✓ Existen una función de preferencias intertemporal, siendo la tasa de descuento $\rho > 0$[38].

### 5.1.2 Ecuación de movimiento

De la condición macroeconómica tenemos:

$$Y_t = C_t + I_t^b$$

Dividiendo la condición entre el numero de trabajadores de la sociedad ($L_t$) tenemos;

$$\frac{Y_t}{L_t}=\frac{C_t}{L_t}+\frac{I_t^b}{L_t} \Longrightarrow \quad y_t = c_t + \frac{I^b}{L_t} \Rightarrow f(k_t)=c_t+\dot{k}_t+(n+\delta)k_t \ldots (I)$$

Despejando $\dot{k}_t$ de la ecuación (I)

$$\dot{k}_t = f(k_t)-c_t-(n+\delta)k_t \ldots (I)$$

Donde:

$\dot{k}_t$ : Representa la tasa de cambio por trabajador.

$c_t$ : Consumo por trabajador.

$y_t$ : Producto por trabajador.

$k_t$ : Capital por trabajador.

$\delta$ : Tasa de descuento.

$n$ : Tasa de crecimiento de la población.

Otro método de cómo obtener a ecuación de movimiento es mediante la maximización de la empresa.

### Decisión de la empresa

Definimos los beneficios de la empresa en términos per cápita.

$$\pi = \frac{\Pi}{L_t} = f(k_t)-w-(r+\delta)\frac{K_t}{L_t}$$

Decisión de inversión de la empresa:

$$Máx: \ \pi = f(k_t)-w-(r+\delta)k_t$$

[38] Para *Ramsey* esta tasa se debe a su aparición exclusivamente a la debilidad de la imaginación, por que los individuos aunque altruistas tienen un egonismo paterno dentro de un mundo de altruismo generacional. Pero veremos que para solucionar el problema de la convergencia tendremos que utilizar el factor de descuento que tiene el término $\rho > 0$.

$$C.P.O: \quad \frac{\partial \pi}{\partial k_t} = 0 \Rightarrow f'(k_t) = r + \delta \ldots (II)$$

Decisión de contratación de la empresa:

$$Máx: \quad \Pi = L_t f(k_t) - wL_t - (r+\delta)K_t$$

$$C.P.O: \quad \frac{\partial \Pi}{\partial L_t} = 0 \Rightarrow f(k_t) + L_t \frac{\partial f}{\partial k_t}\frac{\partial k_t}{\partial L_t} - w = 0$$

$$f(k_t) + L_t f'(k_t) k_t \frac{1}{L_t} = w \quad \Longrightarrow \quad \left[ f(k_t) - f'(k_t)k_t \right] = w \ldots (III)$$

Al igual que vimos en el modelo de *Solow - Swan*, en una economía cerrada la inversión es igual al ahorro, por eso en esta economía se tiene que cumplir que la cantidad de capital que compran las empresas que denotamos por $\dot{k}_t$ es igual al ahorro de las familias que es igual a $\dot{b}_t$. Así, teniendo en cuenta que ahorro es igual a inversión la ecuación que describe el comportamiento del capital per-capita es la siguiente:

$$\dot{k}_t = w - c_t + (r-n)k_t \ldots (IV)$$

Que se obtiene de reemplazar $\dot{b}_t$ por $\dot{k}_t$ en la restricción presupuestaria de las familias. Sustituyendo la ecuación (III) en la (IV) nos queda lo siguiente:

$$\dot{k}_t = f(k_t) - f'(k_t)k_t - c_t + (r-n)k_t \ldots (V)$$

Sustituyendo la ecuación (II) en la ecuación (V):

$$\dot{k}_t = f(k_t) - c_t - (n+\delta)k_t$$, Ley de evolución del capital per cápita

### 5.1.3 El problema de la convergencia

Esto se refiere a que en esta economía se va maximizar la función de utilidad social a través del tiempo.

$$Máx: \quad J = \int_0^\infty \frac{U(c_t)}{e^{\rho t}} dt$$

Si consideramos a la población.

### La Población

Sea que la población que tenga una tasa de crecimiento exógena y constante: $n$

$$P_t = P_0 . e^{nt}$$

Si $P_{(0)} = 1 \quad \Rightarrow \quad P_t = e^{nt}$

Sea que la fuerza de trabajo agregada $L_t$, crezca a una tasa constante exógena: $n$

$$L_t = L_o e^{nt}$$

Demostración que la tasa de crecimiento es constante, tenemos:

$\dfrac{dL_t}{dt} = \dot{L}_t = nL_{(0)}e^{nt}$, dividiendo esta ecuación entre $L_t$, tenemos:

$$\frac{\dot{L}_t}{L_t} = \frac{nL_{(0)}e^{nt}}{L_{(0)}e^{nt}} = n$$

Si $L_{(0)} = 1 \quad \Rightarrow \quad L_t = e^{nt}$

Se asume que toda la población trabaja, luego se incorpora la población a la función " $J$ ".

$$Máx: \quad J = \int_0^{\infty} U(c_t)L_t e^{-\rho t}dt$$

Reemplazando: $L_t = P_t$

$$Máx: \quad J = \int_0^{\infty} U(c_t)e^{nt}.e^{-\rho t}dt$$

$$Máx: \quad J = \int_0^{\infty} U(c_t).e^{-(\rho - n)t}dt$$

Esta sociedad maximiza su utilidad a través del tiempo. En esta sociedad cada individuo busca su propio interés y sin proponérselo de ante mano, busca maximizar la función de bienestar general a través del tiempo, para ello busca determinar la trayectoria general optima del consumo por trabajador a través del tiempo.

### 5.1.4 Planteamiento del problema

$$Máx: \quad J = \int_0^{\infty} U(c_t).e^{-(\rho - n)t}dt \ldots \text{(Función Objetivo)}$$

$$s.a: \quad \dot{k}_t = f(k_t) - c_t - (n+\delta)k_t \ldots \text{(Ecuación de Movimiento)}$$

$$k(t_0) = k_0 \ldots \text{(Condición Inicial)}$$

$$k_0 > 0 : Dado$$

$$0 < c_t < f(k_t)$$

$$0 < t < \infty$$

Para solucionar el problema se debe cumplir que: $\rho > n$ es decir que la tasa de descuento tiene que ser mayor que la tasa de crecimiento de la población.

**1)** Comenzaremos a solucionar el problema de control optimo por el método que nos dejo *Pontryagin*, que se basa en la metodología del *Hamiltoniano*, para esto pasaremos a plantear el hamiltoniano.

$$H(c_t, k_t, \lambda_t, t) = U(c_t).e^{-(\rho - n).t} + \lambda_t\left[f(k_k) - c_t - (n+\delta)k_t\right]$$

Donde
$k_t$ : Variable de estado.
$c_t$ : Variable de control.
$\lambda_t$ : Variable de coestado.

**Condición de Primer Orden (CIO)**

**2)** Tomando la derivada del Hamiltoniano con respecto de la variable de control e igualándolo a cero. $\frac{\partial H}{\partial c_t} \equiv \frac{\partial U_t}{\partial c_t} + \frac{\partial \lambda_t}{\partial c_t} = 0$

$$\frac{\partial H}{\partial c_t} = e^{-(\rho - n)t}.U'(c_t) + \lambda_t(-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{U'(c_t)}{e^{(\rho - n)t}} = \lambda_t \ldots (I)$$

Valor actual de la utilidad = Multiplicador Dinámico

**3)** Tomando la derivada del Hamiltoniano con respecto a la variable de estado e imponiendo la igualdad al negativo de la derivada del multiplicador con respecto al tiempo.

$$\frac{\partial H}{\partial k_t} = -\dot{\lambda}_t \quad \Rightarrow \quad \lambda_t\left[f'(k_t) - (n+\delta)\right] = -\dot{\lambda}_t$$

$$\left[f'(k_t) - (n+\delta)\right] = -\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} \ldots (II)$$

**4)** Tomando la derivada con respecto al multiplicado lagrangiano, tenemos:

$$\frac{\partial H}{\partial k_t} = \dot{k}_t \quad \Rightarrow \quad \left[f(k_t) - c_t - (n+\delta)\right] = \dot{k}_t$$

$$\left[f(k_t) - c_t - (n+\delta)\right] = \dot{k}_t \ldots (III)$$

**Condición de Segundo Orden (CIIO)**

$$\frac{\partial^2 H}{\partial c_t^2} = \underbrace{e^{-(\rho - n)t}}_{>0}\ \mathrm{x}\ \underbrace{.U''(c_t)}_{0<} < 0$$

Esta condición nos asegura un consumo máximo y La concavidad del consumo.

**5)** La condición de transversalidad-multiplica la variable de estado por el precio implícito de capital (multiplicador de Lagrange) en el momento terminal y pone igual a cero.

**Condición de Transversalidad**

$$\underset{t\to\infty}{Lím}\, \lambda_t k_t = 0$$

Esto quiere decir que $\lambda_t = 0$ (el precio implícito de capital en el periodo final) o que $k_t = 0$ (el stock de capital en el momento que muere).

$$\underset{t\to\infty}{Lím}\lambda_t = \frac{1}{\cancel{e^{(\rho-n)\infty}}}^{(1/\infty)\approx 0} \Rightarrow \underset{t\to\infty}{Lím}\lambda_t = 0$$

De la ecuación (II) tenemos $f'(k_t)-(n+\delta)=-g_\lambda \Rightarrow Pmgk-(n+\delta)=-g_\lambda$

Aplicando logaritmo neperiano a la ecuación (I) tenemos:

$$-(\rho-n)t.\cancel{\ln e}^{\approx 1}+\ln U'(c_t)=\ln\lambda_t \Rightarrow -(\rho-n)t+\ln U'(c_y)=\ln\lambda_t$$

Aplicando la derivada temporal (derivada con respecto a "*t*") a la ecuación tenemos:

$$-(\rho-n.\frac{dt}{dt}+\frac{d[\ln U'(c_t)]}{dt}=\frac{d(\ln\lambda_t)}{dt}$$

$$-(\rho-n)+\frac{1}{U'(c_t)}.\underbrace{\frac{dU'(c_t)}{\partial c_t}}.\underbrace{\frac{\partial c_t}{dt}}=\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t}$$

$$-(\rho-n)+\frac{1}{U'(c_t)}.U''(c_t).\dot{c}_t=\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t}$$

A la ecuación anterior multiplicaremos y dividiremos entre el consumo por trabajador ($c_t$)

$$-(\rho-n)+\underbrace{\frac{1}{U'(c_t)}.U''(c_t).\frac{1}{c_t}}.\frac{\dot{c}_t}{c_t}=\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t}$$

$$-(\rho-n)-\theta.\frac{\dot{c}_t}{c_t}=\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t}\ldots(\xi)$$

Donde

$\theta=\frac{1}{U'(c_t)}.U''(c_t).\frac{1}{c_t}$: Representa la elasticidad de la utilidad marginal con respecto al consumo por trabajador.

Multiplicando por -1 a ala ecuación ($\xi$), tenemos:

$$(\rho-n)+\theta.\frac{\dot{c}_t}{c_t}=-\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t}\ldots(IV)$$

Igualando las ecuación (II) con la ecuación (IV)

$$f'(k_t)-(n+\delta)=-\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t}=(\rho-n)+\theta.\frac{\dot{c}_t}{c_t}$$

Despejando $\frac{\dot{c}_t}{c_t}$, tenemos:

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{f'(k_t) - (\rho + \delta)}{\theta} \ldots (V)$$ , La proposición *Ramsey - Keynes*

Esta ecuación nos dice que la tasa óptima del consumo por trabajador es la razón del producto marginal del capital menos la tasa de depreciación y la tasa de descuento intertemporal dividido sobre la elasticidad de la utilidad marginal con respecto al consumo por trabajador.

$\gamma_c = \frac{1}{\theta}\left[f'(k_t) - (\rho + \delta)\right]$: Evolución del consumo por unidad de trabajo efectivo.

Así mismo se puede expresar la ecuación como: $\dot{c}_t = \frac{1}{\theta}\left[f'(k_t) - (\rho + \delta)\right]c_t \ldots (VI)$

### 5.1.5 Sistema de Ecuaciones Diferenciales (Diagrama de fases)

Existen dos ecuaciones diferenciales que nos ayudan a graficar el diagrama de fases de este modelo son:

*1$^{er}$ Ecuación diferencial:* $\dot{k}_t = f(k_t) - c_t - (n + \delta)k_t$

*2$^{da}$ Ecuación diferencial:* $\dot{c}_t = \frac{1}{\theta}\left[f'(k_t) - (\rho + \delta)\right]c_t$

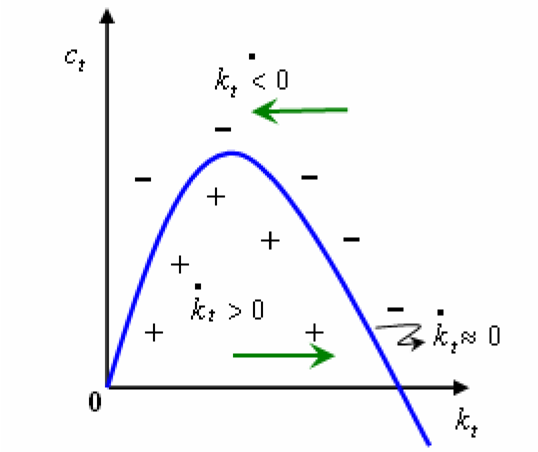
***Encontrando la curva:*** $\dot{k} = 0$

De la 1$^{er}$ Ecuación diferencial

Si $\dot{k}_t = 0$ $\Rightarrow$ $0 = f(k_t) - c_t - (n + \delta)k_t$

Entonces $c_t = f(k_t) - (n + \delta)k_t$

**Gráfico [5.2]: Comportamiento de** $\dot{k} = 0$



Si nos situamos por encima de la curva $\dot{k}_t = 0$, vemos que un pequeño movimiento de $c_t$ irá asociada a una disminución de $\dot{k}_t < 0$. Dado que la 1[er] Ecuación diferencial, donde el consumo aparece con signo negativo, entonces concluimos que por encima de la $\dot{k}_t = 0$, el capital decrece $\dot{k}_t < 0$. Denotamos el movimiento de flechas así la izquierda, tal como aparece en el gráfico [5.2]. Las flechas se dirigen en forma horizontal por que en el eje horizontal aparece $k_t$.

Derivando la primera ecuación diferencial con respecto a $c_t$ se obtiene:

$$\frac{d\dot{k}_t}{dc_t} = -1 < 0$$

Donde se demuestra que al aumentar el valor de $c_t$ disminuye el valor de $\dot{k}_t$

De la misma manera analizaremos que pasa si ubicamos un vector por debajo de la curva $\dot{k}_t = 0$, las flechas apuntan así la derecha, diciéndonos que por debajo de la curva $\dot{k}_t = 0$, el capital crece $\dot{k}_t > 0$, en este caso las flechas apuntan hacia la derecha.

***Encontrando la curva:*** $\dot{c} = 0$

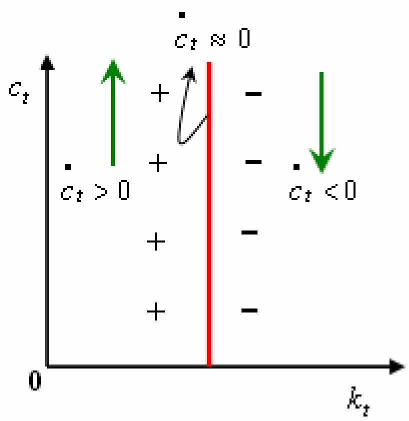
De la 2[da] ecuación diferencial

Si $\dot{c}_t = 0 \Rightarrow 0 = \frac{c_t}{\theta}\left[f'(k_t) - (\rho + \delta)\right]$

Entonces $f'(k_t) = (\rho + \delta) \Rightarrow$

$Pmgk = (\rho + \delta)$, Representa la ecuación de una recta que es paralela al eje de ordenadas

**Gráfico [5.3]: Comportamiento de** $\dot{c} = 0$




Ejercicios de Crecimiento Económico

Esto quiere decir si nos encontramos por encima de la curva $\dot{c}_t = 0$, por un aumento de un poquito de $k_t$, Dado que $f'(k_t)$ es una función creciente, por lo que el valor de $\dot{c}$ de la 2da Ecuación diferencial pasa hacer negativo $\dot{c}_t < 0$. Concluimos que a la derecha de la curva, el consumo decrece, por lo que se dibuja las flechas apuntando hacia abajo.

Para demostrar esto pasaremos a derivar la segunda ecuación con respecto a $k_t$

$$\frac{d\dot{c}_t}{dk_t} = -\frac{1}{U''(c_t)}.U'(c_t).f''(k) < 0$$

Lo que nos dice que a la derecha de $\dot{c}_t = 0$ será $\dot{c}_t < 0$

De la misma manera una disminución de $k_t$ hará que $\dot{c}_t > 0$ sea positivo. Esto significa que nos encontramos a la izquierda de $\dot{c}_t = 0$, las flechas apuntarán hacia arriba como se aprecia en el gráfico [5.3], donde las flechas positivas se denota por $\dot{c}_t > 0$.

### 5.1.6 Análisis Cualitativo

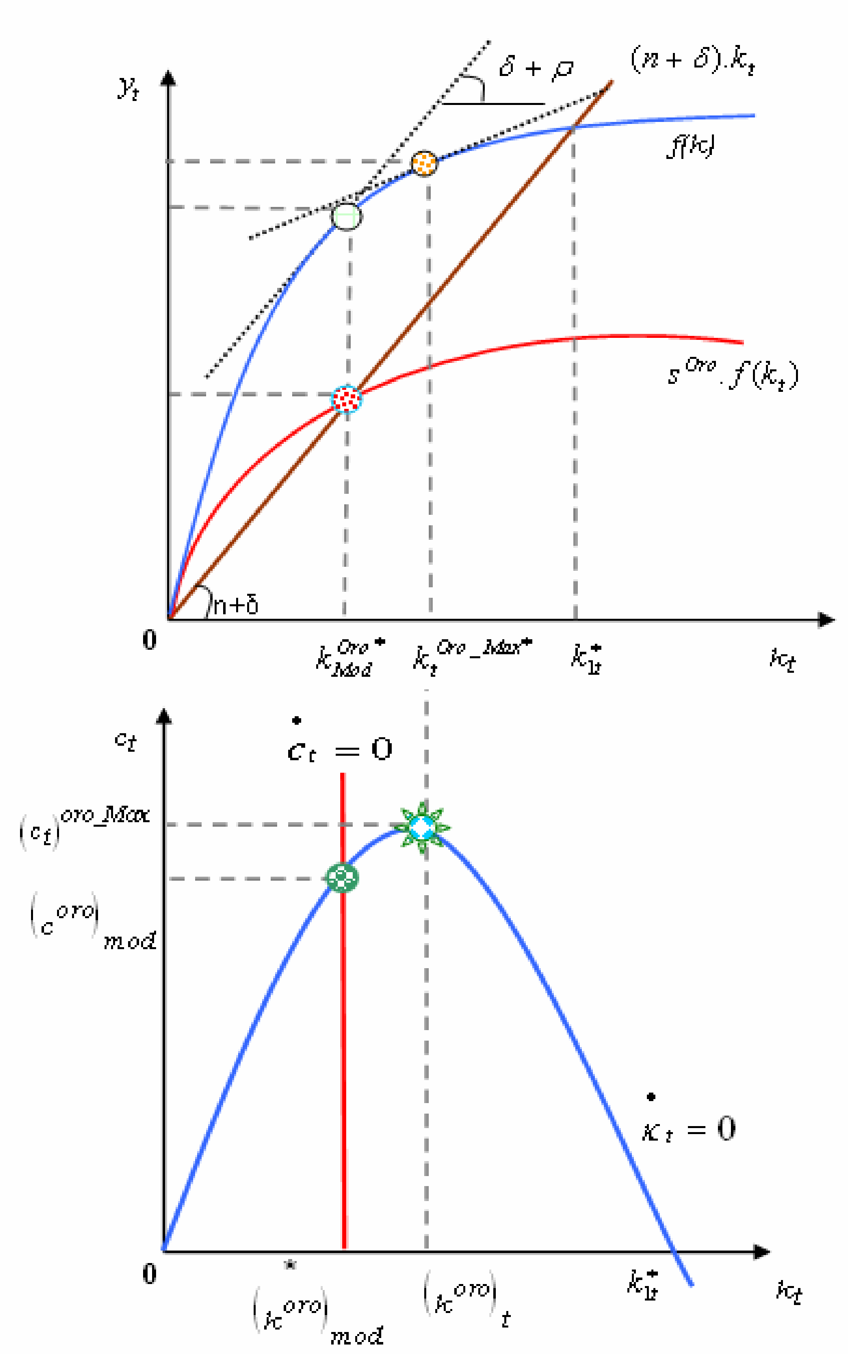
Ahora antes de juntar los dos diagramas de fases en un solo pasaremos a hallar el consumo de oro modificado $c_{\mathrm{mod}}^{Oro^*}$, que es aquel consumo que maximiza el bienestar de los agentes de la sociedad en su conjunto y también se tendrá un nuevo capital por trabajador modificado con en nuevo consumo.

Para esto de la 2da Ecuación diferencial $\dot{c}_t = \frac{1}{\theta}\left[f'(k_t) - (\rho + \delta)\right]c_t$, reemplazando el valor de $\dot{c}_t = 0$, con esto $0 = \left[f'(k_t) - (\rho + \delta)\right]$, entonces $f'(k_t) = (\rho + \delta)$ es el punto de tangencia de la función $f(k_t)$ que es estrictamente decreciente y como se puede apreciar en el gráfico [5.4] la función $f(k_t)$ es estrictamente de creciente y convexa. Al cortarse estas la tangencia con la función generan un punto que se llama el capital de oro modificado ($k_{\mathrm{mod}}^{Oro^*}$), al proyectar este punto, al grafico inferior nos da el consumo de oro modificado óptimo ($c_{\mathrm{mod}}^{Oro^*}$) que estábamos buscando.

En el caso de una función *Cobb-Douglas*, nos da un capital por trabajador de oro modificado óptimo $k_{\mathrm{mod}}^{Oro^*} = \left(\frac{\alpha A}{\delta + \rho}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

Donde $k_{\mathrm{mod}}^{Oro^*}$ esta representado por una línea vertical. El lector habrá notado que el stock de capital por trabajador hallado es menor que el stock de capital de oro y eso es por que $\rho > n$ y $f(k_t)$ es una función decreciente.

**Gráfico [5.4]: El consumo de Oro óptimo modificado**




### 5.1.7 Estado de crecimiento proporcionado

El estado de crecimiento proporcionado, se halla cuando las curvas $\dot{c}_t = 0$ y $\dot{k}_t = 0$ se cruzan y esto se puede observar en el grafico [5.5], que se curtan en tres puntos.

**El primer** punto que esta representado por de un sol de color naranja, es el eje de coordenadas donde $\dot{c}_t = 0$ y $\dot{k}_t = 0$.

**El segundo** punto que representa al estado proporcionado, que esta representado por un sol de color verde fosforescente, es el punto $k_{\text{mod}}^{Oro}$, que corresponde a la intersección de $\dot{k}_t = 0$, de la 1[er] Ecuación diferencial $\dot{k}_t = f(k_t) - c_t - (n+\delta)k_t$, reemplazando $\dot{k}_t = 0$ y $c_t = 0$ obtenemos el capital $k_{\text{mod}}^{Oro}$ que satisface $f(k_{\text{mod}}^{Oro}) = (n+\delta)k_t$, donde este capital esta a la derecha del capital máximo.

**El tercer** punto es en la intersección de $\dot{k}_t = 0$ y $k_{1t}^*$ en este punto esta representado en el grafico con un solo de color amarillo. El capital en este punto en el largo plazo esta economía converge necesariamente a un estado de proporcionado que conlleva a cantidades positivas del consumo.

En el estado proporcionado es una situación en que las variables per cápita crecen a una tasa constante. Se describe el comportamiento del consumo, para que el consumo crezca una tasa constante el capital tiene que ser siempre el mismo:

$$\gamma_c = cte \text{ si y solo si, } k_t = k_{t+1} \text{ lo que implica que } \gamma_k = 0$$

El stock de capital no cambie se tiene que cumplir que el consumo per cápita no varíe.

$$\gamma_k = cte \text{ si y solo si, } c_t = c_{t+1} \text{ lo que implica que } \gamma_c = 0$$

En el estado de crecimiento proporcionado: $\gamma_k = 0$ y $\gamma_c = 0$

Si $\gamma_c = 0 \Rightarrow \alpha A k_t^{-(1-\alpha)} = \rho + \delta$

$$k_{\text{mod}}^{Oro*} = \left(\frac{\alpha A}{\delta + \rho}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \text{ Stock de capital del estado proporcionado}$$

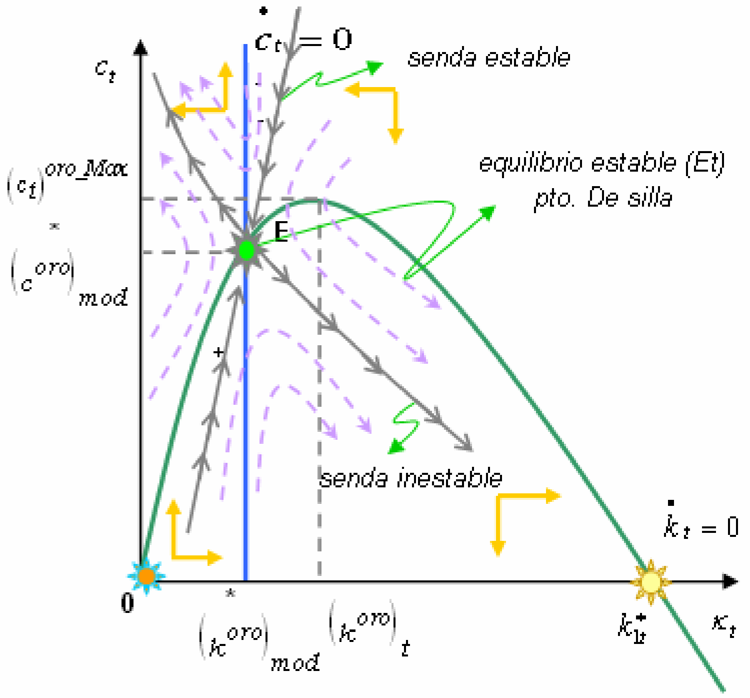
El PIB per capita de estado estacionario, se obtiene sustituyendo el capital de estado proporcionado en la función de producción:

$$y_{\text{mod}}^{Oro*} = A\left(\frac{\alpha A}{\delta + \rho}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \text{ Producción en el estado proporcionado}$$

Sabiendo que el consumo per cápita es la renta menos el ahorro, lo calculamos como:

$$c_{\text{mod}}^{Oro*} = (1-s)A\left(\frac{\alpha A}{\delta + \rho}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \text{ Consumo per cápita en el estado proporcionado}$$

**Gráfico [5.5]: El equilibrio en el modelo de *Ramsey***




### 5.1.8 Dinámica

La dinámica que esta representada por las flechas como se observa en el grafico [5.5], donde en el origen existe un estado inestable, por que nunca llegamos a un estado proporcionado.

El segundo estado proporcionado, $k^*_{1t}$ es estable en todas sus flechas que existen alrededor apuntan hacia este punto.

El tercer estado proporcionado es $k^{Oro}_{\text{mod}}$ con estabilidad este punto es llamado *"punto de silla"* en estado trayectoria llamamos "*saddle paht stability*" o "trayectoria estable" que converge a un estado proporcionado. Este tercer punto también genera el punto de silla, por que existen líneas aerodinámicas que convergen y divergen alrededor del punto.

La dinámica de transmisión nos dice que si aumentara el consumo, el capital en el largo plazo, la economía converge hacia un estado proporcionado $k^{Oro}_{\text{mod}}$.

## 5.2 Modelo de Ramsey con progreso tecnológico

Es esta parte introduciremos el progreso tecnológico exógeno en el modelos de crecimiento, dicho progreso es potenciados del trabajo, este es el nuevo supuesto que se agrega al modelo.

Entonces pasaremos a introducir el progreso tecnológico en 1[er] *Ecuación diferencial* $\dot{k}_t = f(k_t) - c_t - (n + m_L + \delta)k_t$, planteamos nuestra función de utilidad agregada de la sociedad.

$$Máx: \quad J = \int_0^\infty U(c_t).e^{-(\rho-n)t}dt \ldots (\textit{Función Objetivo})$$

$$s.a: \quad \dot{k}_t = f(k_t) - c_t - (n + m_L + \delta)k_t \ldots (\textit{Ecuación de Movimiento})$$

$$k(t_0) = k_0 \ldots (\textit{Condición Inicial})$$

$$k_0 > 0: Dado$$

$$0 < c_t < f(k_t)$$

$$0 < t < \infty$$

Para solucionar el problema se debe cumplir que: $\rho > n + (1-\theta)m_L$ es decir que la función de utilidad este acotada en este caso.

**1)** Comenzaremos a solucionar el problema de control optimo por el método que nos dejo *Pontryagin*, que se basa en la metodología del *Hamiltoniano*, para esto pasaremos a plantear el hamiltoniano.

$$H(c_t, k_t, \lambda_t, t) = U(c_t).e^{-(\rho-n).t} + \lambda_t\left[f(k_k) - c_t - (n + m_L + \delta)k_t\right]$$

Donde

$k_t$ : Variable de estado.

$c_t$: Variable de control.

$\lambda_t$: Variable de coestado.

### Condición de Primer Orden (CIO)

**2)** Tomando la derivada del Hamiltoniano con respecto de la variable de control e igualándolo a cero. $\frac{\partial H}{\partial c_t} \equiv \frac{\partial U_t}{\partial c_t} + \frac{\partial \lambda_t}{\partial c_t} = 0$

$$\frac{\partial H}{\partial c_t} = e^{-(\rho-n)t}.U'(c_t) + \lambda_t(-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{U'(c_t)}{e^{(\rho-n)t}} = \lambda_t \ldots (I)$$

Valor actual de la utilidad = Multiplicador Dinámico

**3)** Tomando la derivada del Hamiltoniano con respecto a la variable de estado e imponiendo la igualdad al negativo de la derivada del multiplicador con respecto al tiempo.

$$\frac{\partial H}{\partial k_t} = -\dot{\lambda}_t \quad \Rightarrow \quad \lambda_t\left[f'(k_t) - (n+\delta+m_L)\right] = -\dot{\lambda}_t$$

$$\left[f'(k_t) - (n+m_L+\delta)\right] = -\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t}\ldots(II)$$

**4)** Tomando la derivada con respecto al multiplicado lagrangiano, tenemos:

$$\frac{\partial H}{\partial k_t} = \dot{k}_t \quad \Rightarrow \quad \left[f(k_t) - c_t - (n+m_L+\delta)\right] = \dot{k}_t$$

$$\left[f(k_t) - c_t - (n+m_L+\delta)\right] = \dot{k}_t\ldots(III)$$

**Condición de Segundo Orden (CIIO)**

$$\frac{\partial^2 H}{\partial c_t^2} = \underbrace{e^{-(\rho-n)t}}_{>0}\,\mathrm{x}\,.\underbrace{U''(c_t)}_{0<} < 0$$

Esta condición nos asegura un consumo máximo y La concavidad del consumo.

**5)** La condición de transversalidad-multiplica la variable de estado por el precio implícito de capital (multiplicador de Lagrange) en el momento terminal y pone igual a cero.

**Condición de Transversalidad**

$$\underset{t\to\infty}{Lím}\,\lambda_t k_t = 0$$

Esto quiere decir que $\lambda_t = 0$ (el precio implícito de capital en el periodo final) o que $k_t = 0$ (el stock de capital en el momento que muere).[39]

$$\underset{t\to\infty}{Lím}\,\lambda_t = \overbrace{\frac{1}{e^{(\rho-n)\infty}}}^{(1/\infty)\approx 0} \quad \Rightarrow \quad \underset{t\to\infty}{Lím}\,\lambda_t = 0$$

De la ecuación (II) tenemos $f'(k_t) - (n+m_L+\delta) = -g_\lambda \Rightarrow Pmgk - (n+m_L+\delta) = -g_\lambda$

Aplicando logaritmo neperiano a la ecuación (I) tenemos:

$$-(\rho-n)t.\overbrace{\ln e}^{\approx 1} + \ln U'(c_t) = \ln\lambda_t \quad \Rightarrow \quad -(\rho-n)t + \ln U'(c_y) = \ln\lambda_t$$

Aplicando la derivada temporal (derivada con respecto a "*t*") a la ecuación tenemos:

$$-(\rho-n.\frac{dt}{dt} + \frac{d\left[\ln U'(c_t)\right]}{dt} = \frac{d(\ln\lambda_t)}{dt}$$

[39] En la economía de Ramsey se supone que los individuos "fenecen" en el infinito. $\underset{t\to\infty}{Lím}\,\lambda_t = 0$, esto indica que el valor del stock de activasen el ultimo momento del horizonte temporal debe ser cero.

$$-(\rho-n)+\frac{1}{U'(c_t)}.\underbrace{\frac{dU'(c_t)}{\partial c_t}.\frac{\partial c_t}{dt}}_{}=\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t}$$

$$-(\rho-n)+\frac{1}{U'(c_t)}.U''(c_t).\dot{c}_t=\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t}$$

A la ecuación anterior multiplicaremos y dividiremos entre el consumo por trabajador ($c_t$)

$$-(\rho-n)+\underbrace{\frac{1}{U'(c_t)}.U''(c_t).\frac{1}{c_t}}_{}.\frac{\dot{c}_t}{c_t}=\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t}$$

$$-(\rho-n)-\theta.\frac{\dot{c}_t}{c_t}=\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t}\ldots(\xi)$$

Donde

$\theta=\frac{1}{U'(c_t)}.U''(c_t).\frac{1}{c_t}$: Representa la elasticidad de la utilidad marginal con respecto al consumo por trabajador.

Multiplicando por -1 a ala ecuación ($\xi$), tenemos:

$$(\rho-n)+\theta.\frac{\dot{c}_t}{c_t}=-\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t}\ldots(IV)$$

Igualando las ecuación (II) con la ecuación (IV)

$$f'(k_t)-(n+m_L+\delta)=-\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t}=(\rho-n)+\theta.\frac{\dot{c}_t}{c_t}$$

Despejando $\frac{\dot{c}_t}{c_t}$, tenemos:

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t}=\frac{f'(k_t)-(\rho+m_L+\delta)}{\theta}\ldots(V)$$ , La proposición *Ramsey - Keynes*

Esta ecuación nos dice que la tasa óptima del consumo por trabajador es la razón del producto marginal del capital menos la tasa de depreciación, la tasa de aumento tecnológico debido a la eficiencia del trabajo y la tasa de descuento intertemporal dividido sobre la elasticidad de la utilidad marginal con respecto al consumo por trabajador.

$\gamma_c=\frac{1}{\theta}\left[f'(k_t)-(\rho+\delta)\right]$: Evolución del consumo por unidad de trabajo efectivo.

Así mismo se puede expresar la ecuación como: $\dot{c}_t=\frac{1}{\theta}\left[f'(k_t)-(\rho+m_L+\delta)\right]c_t\ldots(VI)$

### 5.2.1 Sistema de Ecuaciones Diferenciales (Diagrama de fases)

Existen dos ecuaciones diferenciales que nos ayudan a graficar el diagrama de fases de este modelo son:

*1^er Ecuación diferencial:* $\dot{k}_t = f(k_t) - c_t - (n + m_L + \delta)k_t$

*2^da Ecuación diferencial:* $\dot{c}_t = \frac{1}{\theta}[f'(k_t) - (\rho + m_L + \delta)]c_t$

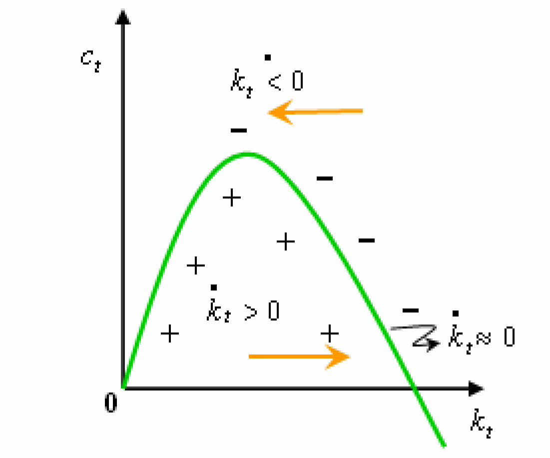
***Encontrando la curva:*** $\dot{k} = 0$

De la 1^er Ecuación diferencial

Si $\dot{k}_t = 0 \Rightarrow 0 = f(k_t) - c_t - (n + m_L + \delta)k_t$

Entonces $c_t = f(k_t) - (n + m_L + \delta)k_t$

**Gráfico [5.6]: Diagrama de fases con progreso tecnológico de** $\dot{k} = 0$




Si nos situamos por encima de la curva $\dot{k}_t = 0$, vemos que un pequeño movimiento de $c_t$ irá asociada a una disminución de $\dot{k}_t < 0$. Dado que la 1^er Ecuación diferencial, donde el consumo aparece con signo negativo, entonces concluimos que por encima de la $\dot{k}_t = 0$, el capital decrece $\dot{k}_t < 0$. Denotamos el movimiento de flechas así la izquierda, tal como aparece en el gráfico [5.6]. Las flechas se dirigen en forma horizontal por que en el eje horizontal aparece $k_t$.

Derivando la primera ecuación diferencial con respecto a $c_t$ se obtiene:

$$\frac{d\dot{k}_t}{dc_t} = -1 < 0$$

Donde se demuestra que al aumentar el valor de $c_t$ disminuye el valor de $\dot{k}_t$

De la misma manera analizaremos que pasa si ubicamos un vector por debajo de la curva $\dot{k}_t = 0$, las flechas apuntan así la derecha, diciéndonos que por debajo de la curva $\dot{k}_t = 0$, el capital crece $\dot{k}_t > 0$, en este caso las flechas apuntan hacia la derecha.

***Encontrando la curva:*** $\dot{c} = 0$

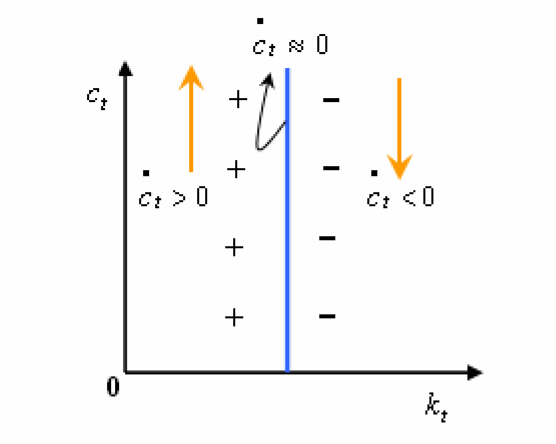
De la 2da ecuación diferencial

Si $\dot{c}_t = 0$ $\Rightarrow$ $0 = \frac{c_t}{\theta}\left[f'(k_t) - (\rho + m_L + \delta)\right]$

Entonces $f'(k_t) = (\rho + m_L + \delta)$ $\Rightarrow$

$Pmgk = (\rho + m_L + \delta)$, Representa la ecuación de una recta que es paralela al eje de ordenadas

**Gráfico [5.7]: Diagrama de fases con progreso tecnológico de** $\dot{c} = 0$




Esto quiere decir si nos encontramos por encima de la curva $\dot{c}_t = 0$, por un aumento de un poquito de $k_t$, Dado que $f'(k_t)$ es una función creciente, por lo que el valor de $\dot{c}$ de la 2da Ecuación diferencial pasa hacer negativo $\dot{c}_t < 0$. Concluimos que a la derecha de la curva, el consumo decrece, por lo que se dibuja las flechas apuntando hacia abajo.

Para demostrar esto pasaremos a derivar la segunda ecuación con respecto a $k_t$

$$\frac{d\dot{c}_t}{dk_t} = -\frac{1}{U''(c_t)}.U'(c_t).f''(k) < 0$$

Lo que nos dice que a la derecha de $\dot{c}_t = 0$ será $\dot{c}_t < 0$

De la misma manera una disminución de $k_t$ hará que $\dot{c}_t > 0$ sea positivo. Esto significa que nos encontramos a la izquierda de $\dot{c}_t = 0$, las flechas apuntarán hacia arriba como se aprecia en el gráfico [5.7], donde las flechas positivas se denota por $\dot{c}_t > 0$.

Ahora antes de juntar los dos diagramas de fases en un solo pasaremos a hallar el consumo de oro modificado $c_{\text{mod}}^{Oro^*}$, que es aquel consumo que maximiza el bienestar de los agentes de la sociedad en su conjunto y también se tendrá un nuevo capital por trabajador modificado con en nuevo consumo.

Para esto de la 2da Ecuación diferencial $\dot{c}_t = \frac{1}{\theta}\left[f'(k_t) - (\rho + m_L + \delta)\right]c_t$, reemplazando el valor de $\dot{c}_t = 0$, con esto $0 = \left[f'(k_t) - (\rho + m_L + \delta)\right]$, entonces $f'(k_t) = (\rho + m_L + \delta)$ es el punto de tangencia de la función $f(k_t)$ que es estrictamente decreciente y como se puede apreciar en el gráfico [5.4] la función $f(k_t)$ es estrictamente de creciente y convexa. Al cortarse estas la tangencia con la función generan un punto que se llama el capital de oro modificado ($k_{\text{mod}}^{Oro^*}$), al proyectar este punto, al grafico inferior nos da el consumo de oro modificado óptimo ($c_{\text{mod}}^{Oro^*}$) que estábamos buscando.

En el caso de una función *Cobb-Douglas*, nos da un capital por trabajador de oro modificado óptimo $k_{\text{mod}}^{Oro^*} = \left(\frac{\alpha A}{\delta + m_L + \rho}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

Donde $k_{\text{mod}}^{Oro^*}$ esta representado por una línea vertical. El lector habrá notado que el stock de capital por trabajador hallado es menor que el stock de capital de oro y eso es por que $\rho > n$ y $f(k_t)$ es una función decreciente.

### 5.2.2 Estado de crecimiento proporcionado

El estado de crecimiento proporcionado, se halla cuando las curvas $\dot{c}_t = 0$ y $\dot{k}_t = 0$ se cruzan y esto se puede observar en el grafico [5.5], que se curtan en tres puntos.

**El primer** punto que esta representado por de un sol de color naranja, es el eje de coordenadas donde $\dot{c}_t = 0$ y $\dot{k}_t = 0$.

**El segundo** punto que representa al estado proporcionado, que esta representado por un sol de color verde fosforescente, es el punto $k_{\text{mod}}^{Oro}$, que corresponde a la intersección de $\dot{k}_t = 0$**,** de la 1er Ecuación diferencial $\dot{k}_t = f(k_t) - c_t - (n + m_L + \delta)k_t$, reemplazando $\dot{k}_t = 0$ y $c_t = 0$ obtenemos el capital $k_{\text{mod}}^{Oro}$ que satisface $f(k_{\text{mod}}^{Oro}) = (n + m_L + \delta)k_t$, donde este capital esta a la derecha del capital máximo.

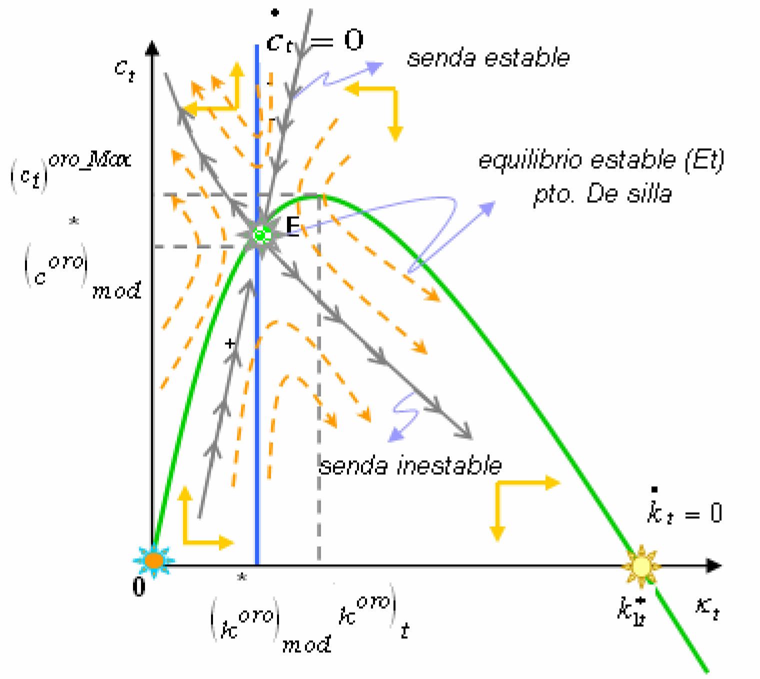
**El tercer** punto es en la intersección de $\dot{k}_t = 0$ y $k_{1t}^*$ en este punto esta representado en el grafico con un solo de color amarillo. El capital en este punto en el largo plazo esta economía converge necesariamente a un estado de proporcionado que conlleva a cantidades positivas del consumo.

En el estado proporcionado es una situación en que las variables per cápita crecen a una tasa constante. Se describe el comportamiento del consumo, para que el consumo crezca una tasa constante el capital tiene que ser siempre el mismo.[40]

---

[40] En este el estado proporcionado, la tasa de crecimiento de las variables en términos per cápita es $m_L$.

**Gráfico [5.8]: El equilibrio en el modelo de *Ramsey* con progreso tecnológico**



# Capítulo VI

## Enfoques recientes de crecimiento endógeno

*"Entender es relacionar, encontrar la unidad bajo la diversidad. Un acto de inteligencia es darse cuenta de que la caída de una manzana y el movimiento de la Luna, que no cae, están regidos por la misma ley."*

*Ernesto Sabato* (1945)

En los años 70, la teoría del crecimiento entro en decadencia, debido a que solo se centraba en modelos de crecimiento exógeno. Ha mediados de la década de los 80 un grupo de economistas como: *Romer*, *Lucas*, *Barro*, etc. Plantearon que debería investigarse las causas y orígenes del crecimiento económico y que era necesaria plantear un modelo de crecimiento con progreso tecnológico endógeno.

## 6.1 Modelos AZ

Son aquellos modelos de crecimiento que tiene una tecnología lineal y utilizan una función de producción $AZ_t$, donde considera un capital compuesto, capital amplio que considera un capital físico y capital humano y estas se combinan en proporciones fijas.[41] La ausencia de rendimientos decrecientes y va existir rendimientos constantes del capital compuesto.

Donde
$Z_t$: Capital compuesto con tecnología lineal.

Los modelos $AZ_t$ no cumplen con las propiedades de los modelos neoclásicos, como veremos.

### 6.1.1 Supuestos del modelo

- ✓ Sea una economía capitalista que no tiene relación con el exterior.
- ✓ Existe un capital compuesto $Z_t$, que es una combinación de capital físico y capital humano.
- ✓ Existe rendimientos constantes del capital compuesto o amplio.
- ✓ Exhibe rendimientos constantes a escala; dado que $A(\lambda Z_t) = \lambda AZ_t = \lambda Y_t$.
- ✓ Tiene rendimientos positivos pero no decrecientes de capital.
- ✓ Tiene una función de producción $AZ_t$.

### Función de producción agregada (FPA)

Este modelo describe una función agregada que se encuentra representada por el gráfico [6.1].

$$Y_t = A.Z_t \ldots (FPA)$$

Donde

$Y_t$: Producto agregado en el periodo "*t*".

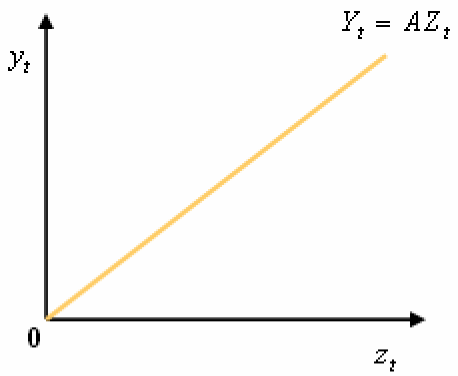
$Z_t$: Stock de capital compuesto en el periodo "*t*".

$A$: Índice de nivel de tecnología.

Si queremos representar el producto marginal del capital compuesto, solo basta con aplicar la derivada de la función de producción agregada con respecto al stock de capital.

[41] Este modelo $AZ_t$, también es llamado "modelo de tecnología $AK_t$", la introducción de este modelo a la literatura economica se la debemos *Romer* (1987) *Rebelo* (1991), cuando introduce el capital compuesto en los años ochenta.

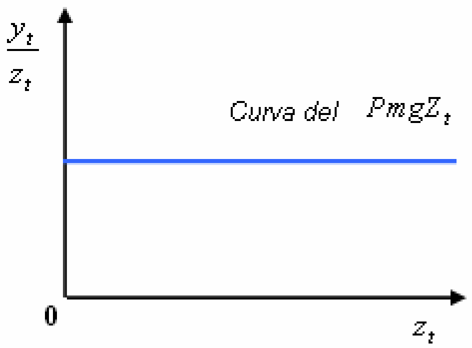
**Gráfico [6.1]: La función de producción agregada**




$$PmgZ = \frac{dY_t}{dZ_t} = A$$

Podemos ver que el producto marginal de la función es una constante, y en el grafico [6.2], se encuentra representado como una línea recta horizontal.

**Gráfico [6.2]: El producto marginal del modelo AZ**

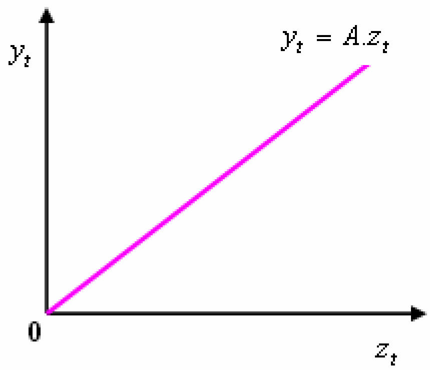



De la ecuación (FPA) dividiendo entre la cantidad de trabajadores obtenemos:

$$\frac{Y_t}{L_t} = A.\frac{Z_t}{L_t} \Longrightarrow y_t = A.z_t \ldots (FPI)$$

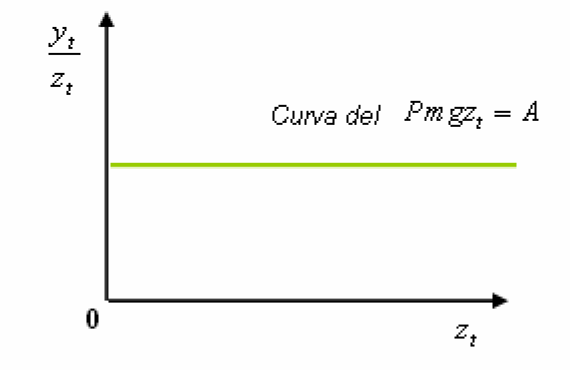
En el grafico [6.3], podemos ver la representación de la función de producción intensiva.

**Gráfico [6.3]: La función de producción intensiva**



Donde en el grafico [6.4] esta representado el producto marginal de la función de producción intensiva.

**Gráfico [6.4]: El producto marginal de la FPI**




$$Pmgz = \frac{dy_t}{dz_t} = A$$

Observación: Donde las variables minúsculas representan variables por trabajador, y las variables mayúsculas, representan valores agregados.

### 6.1.2 Ecuación fundamental

- ✓ Asume que el ahorro agregado es una proporción del ingreso nacional, dado el producto marginal ahorrar ($Pmgs$).
- ✓ Suponiendo que el stock de capital se deprecia a una tasa constante $\delta$ .
- ✓ Sea que la función de fuerza agregada crezca a una tasa constante y exógena $n$ .
- ✓ Sea $n$ el tamaño de la población total.

De la condición de equilibrio macroeconómico tenemos:

$$S = I^b$$

$$sY_t = I_K^n + I_K^{rep}$$

$$s.AZ_t = \dot{Z}_T + \delta .Z_t$$

Dividiendo la ecuación entre el número de trabajadores

$$s.A\frac{Z_t}{L_t} = \frac{\dot{Z}_T}{L_t} + \delta\frac{Z_t}{L_t} \Rightarrow s.Az_t - \delta .z_t = \frac{\dot{Z}_T}{L_t} \ldots (I)$$

Sabemos que: $z_t = \frac{Z_t}{L_t} \Rightarrow \frac{dz_t}{dt} = \frac{d(Z_t/L_t)}{dt} = \frac{\dot{Z}_t L_t - \dot{L}_t Z_t}{(L_t)^2}$

$$\frac{dz_t}{dt} = \frac{\dot{Z}_t}{L_t} - \frac{\dot{L}_t}{L_t}\frac{Z_t}{L_t} \Rightarrow \dot{z}_t + nz_t = \frac{\dot{Z}_t}{L_t} \ldots (II)$$

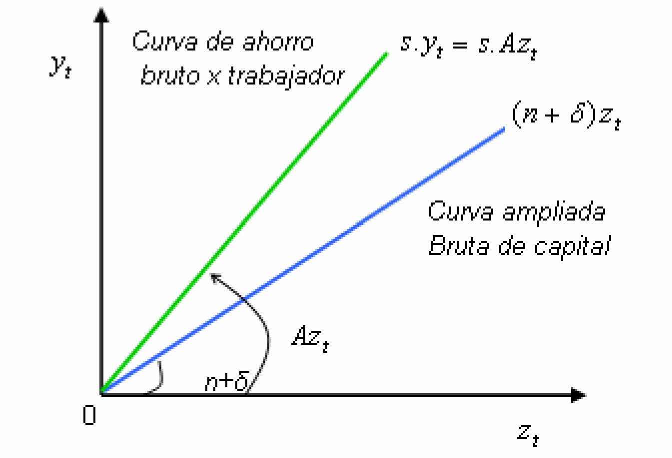
Reemplazando la ecuación (II) en la ecuación (I) y despejando $\dot{z}_t$ tenemos:

$$\dot{z}_t = s.Az_t - (n+\delta)z_t$$ La ecuación fundamental de *Rebelo*

Es una ecuación dinámica del proceso de acumulación del capital compuesto, en una economía capitalista, donde existe en forma combinada el capital físico y el capital humano. Esta ecuación nos dice que la tasa de cambio del capita l por trabajador va ser el remanente del ahorro bruto por trabajador, respecto a ala ampliación bruta de capital compuesto.

En el grafico [6.5], podemos apreciar la grafica de la curva de ahorro bruta por trabajador y de la curva de ampliación bruta de capital compuesto.

**Gráfico [6.5]: El estado de crecimiento progresivo**




### 6.1.3 Dinámica de transmisión

Debido a que esta economía tiene una tecnología muy productiva, va ocurrir que en el largo plazo no se genera un estado de crecimiento proporcionado, si no que e n el largo plazo se va generar un estado de crecimiento progresivo, es aquel estado o situación en el largo plazo en el que se genera una tasa de cambio de capital compuesto.

En el largo plazo el estado de crecimiento progresivo: $\dot{z}_t > 0$

Si $\dot{z}_t > 0$ entonces $s.A > (n+\delta)$, lo cual genera que sea indeterminado $z_t^*$ y esto ocurre por que no existe rendimientos constantes del capital compuesto.

### Versión Barro

De la ecuación fundamental de *Rebelo*

$$\dot{z}_t = s.Az_t - (n+\delta)z_t$$

Dividiendo esta ecuación entre el capital compuesto

$$\frac{\dot{z}_t}{z_t} = s.A - (n+\delta) \Longrightarrow \gamma_z = s.A - (n+\delta)$$

Donde

$\gamma_z$: La tasa de crecimiento del capital por trabajador.

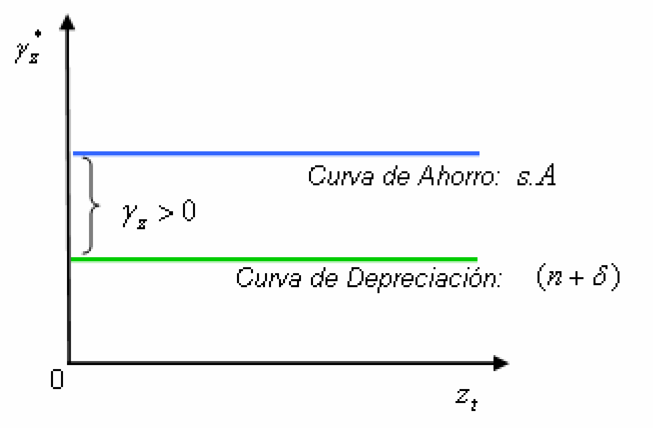
En el estado de crecimiento progresivo si $\gamma_z > 0$ entonces $s.A > (n+\delta)$, con lo cual se determina $z_t^*$.

Dicho de otra manera, observamos que la tasa de crecimiento de esta economía es constante y va ser la diferencia entre dos números.

En esta economía la curva de ahorro es una línea recta horizontal, si nuestra economía es productiva como para que $s.A > (n+\delta)$, la tasa de crecimiento será constante y positiva $\gamma_y = \gamma^* = s.A - (n+\delta)$.

En este modelo también el consumo crece a la misma tasa $\gamma^*$ que la tasa de crecimiento per cápita $\gamma_y = \gamma_c = \gamma^* = s.A - (n+\delta)$.

**Gráfico [6.6]: Versión de *Barro* del modelo AZ**




**Determinación de** $\gamma_y \wedge \gamma_c$

De la función de producción intensiva (FPI) tenemos:

$$y_t = Az_t \quad \Rightarrow \quad Ln(y_t) = Ln(A) + Ln(z_t)$$ , aplicando una derivada temporal

$$\frac{dLn(y_t)}{dt} = \underbrace{\frac{dLn(A)}{dt}}_{=0} + \frac{dLn(z_t)}{dt}$$

$$\gamma_y = \gamma_z$$

De $C_t = Pmgc.Y_t$

Dividiendo entre $L_t$

$$\underbrace{\frac{C_t}{L_t}} = Pmgc.\underbrace{\frac{Y_t}{L_t}}$$

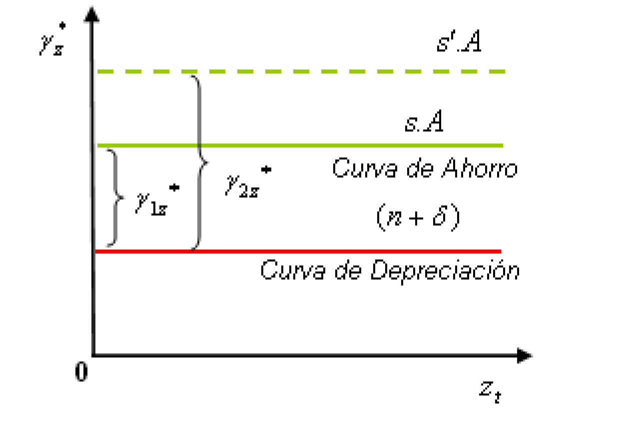
$$\gamma_c = \gamma_y \quad \Rightarrow \quad \gamma_c = \gamma_y = \gamma_z$$

### 6.1.4 Característica del modelo

**a)** La tasa de crecimiento del modelo puede ser positiva sin necesidad de suponer, que las variables crecen continuamente y exógenamente.

**b)** Un aumento de la tasa de ahorro provoca un incremento de la tasa de crecimiento, como se puede ver en el gráfico [6.7], donde un aumento de las tasa de ahorro hace saltar a la curva de ahorro hacia arriba y la distancia entre las dos curvas aumenta.

**Gráfico [6.7]: Aumento de la tasa de ahorro**




**c)** Esta economía carece de una transición hacia el estado proporcionado, por que siempre crece a una tasa constante igual $\gamma_z^* = s.A - (n+\delta)$, sin importar el valor que adopte el stock de capital.[42]

**d)** El modelo predice que no existe relación entre la tasa de crecimiento de la economía y el nivel alcanzado, por lo que el modelo no alcanza convergencia, ni condicional, ni absoluta.

**e)** El modelo $AZ_t$ predice que los efectos recesivos temporal serán permanente, esto quiere decir que el capital, disminuye temporalmente por una causa exógena.

**f)** Un aspecto de este modelo es el que menciona *Saint-Paul* (1992), que la tecnología $AZ_t$, no puede haber demasiada inversión.

Como la tasa de crecimiento per cápita es igual $\gamma_z^* = s.A - (n+\delta)$, la tasa de crecimiento agregado es $\gamma_z^* = s.A - (n+\delta)$, la tasa de crecimiento agregada esta expresada como $\gamma_Y^* = \gamma_y^* + \gamma_L = \gamma_y^* + n = S.A - (n+\delta)$, para que exista eficiencia $r^* < \gamma_y^*$, donde la tasa de interés siempre es igual a $r^* = A - \delta$, entonces $A - \delta < s.A - \delta$ recordemos que la desigualdad no puede darse por que la tasa de ahorro es siempre inferior a 1 ($0 < s < 1$), por lo que A es siempre mayor que $s.A$, por lo tanto con tecnología $AZ_t$ pues no puede ser dinámico ineficiente.

### 6.1.5 Modelo AZ con la función de producción Cobb-Douglas

Este modelo va considerar la producción tiene una función de producción *Cobb-Douglas*

#### Función de producción agregada (FPA)

$$Y_t = AZ_t^{\alpha} L_t^{\beta} \ldots (FPA)$$

[42] Esto quiere decir que el modelo *AZ* carece de un estado proporcionado, por lo que la curva de ahorro no se corta con la curva de depreciación y por ende el modelo no converge.

Dividiendo la función de producción agregada entre $L_t$

$$\frac{Y_t}{L_t} = A\frac{Z_t^{\alpha}}{L_t^{\alpha}}\frac{L_t^{\beta}}{L_t}L_t^{\alpha} \quad \Longrightarrow \quad y_t = Az_t^{\alpha}L_t^{\alpha+\beta-1}\ldots(FPI)$$

De la condición de equilibrio macroeconómico tenemos:

$$S = I^b$$

$$sY_t = I_K^n + I_K^{rep}$$

$$s.Y_t = \dot{Z}_T + \delta.Z_t$$

Dividiendo la ecuación entre el número de trabajadores

$$s.\frac{Y_{tt}}{L_t} = \frac{\dot{Z}_T}{L_t} + \delta\frac{Z_t}{L_t} \quad \Longrightarrow \quad s.y_t - \delta.z_t = \frac{\dot{Z}_T}{L_t}\ldots(I)$$

Sabemos que: $z_t = \dfrac{Z_t}{L_t} \Rightarrow \dfrac{dz_t}{dt} = \dfrac{d(Z_t/L_t)}{dt} = \dfrac{\dot{Z}_t L_t - \dot{L}_t Z_t}{(L_t)^2}$

$$\frac{dz_t}{dt} = \frac{\dot{Z}_t}{L_t} - \frac{\dot{L}_t}{L_t}\frac{Z_t}{L_t} \Rightarrow \dot{z}_t + nz_t = \frac{\dot{Z}_t}{L_t}\ldots(II)$$

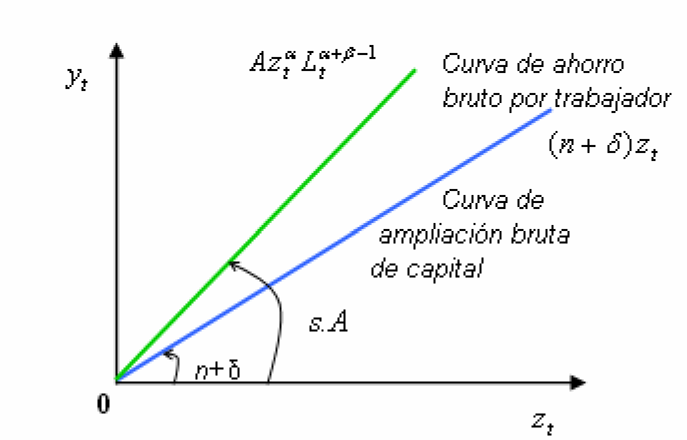
Reemplazando la ecuación (II) en la ecuación (I) y despejando $\dot{z}_t$

$$\dot{z}_t = s.y_t - (n+\delta)z_t$$

Reemplazando la función de producción intensiva (FPI) en la ecuación fundamental

$\dot{z}_t = s.Az_t^{\alpha}L_t^{\alpha+\beta-1} - (n+\delta)z_t$ , la ecuación fundamental con una función *Cobb-Douglas*

**Gráfico [6.8]: Estado de crecimiento progresivo**




En el gráfico [6.8] se puede apreciar la dinámica de transmisión en el estado de crecimiento progresivo $\dot{z}_t > 0$, entonces $s.Az_t^{\alpha}L_t^{\alpha+\beta-1} > (n+\delta)z_t$ implica tener un $z_t^*$ indeterminado.

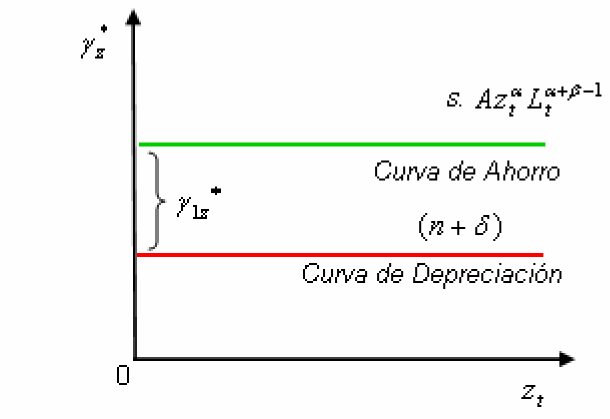
### Versión de Barro

Dividiendo la ecuación fundamental entre $z_t$

$$\gamma_z = \frac{s.Az_t^{\alpha} L_t^{\alpha+\beta-1}}{z_t} - (n+\delta)$$

Como se puede apreciar en el gráfico [6.9] en el estado de crecimiento progresivo $\gamma_z > 0$, entonces $s.Az_t^{\alpha} L_t^{\alpha+\beta-1} > (n+\delta) z_t$ esto implica obtener un $z_t^*$ indeterminado.

**Gráfico [6.9]: Versión de Barro del modelo AZ**




En el grafico [6.9] se puede observa que la curva de ahorro es representado como una línea recta horizontal y la curva de depresión también, por esto este modelo no alcanza un estado de crecimiento proporcionado, sino un estado de crecimiento progresivo.

Observación

Si $Y_t = AZ_t^{\alpha} L_t^{\beta}$ se tiene que la elasticidad del producto respecto a los trabajadores no calificados es nulo entonces $\beta = 0$ y $\alpha = 1$ se tendrá una función $Y_t = AZ_t$.

## 6.2 Modelo de crecimiento con sector Físico y Humano

Este modelo es una extensión de los modelo de crecimiento y que va considerar explícitamente el capital físico y el capital humano.

### 6.2.1 Supuestos del modelo

A los supuestos básicos se le añaden los siguientes supuestos:

- ✓ Sea una economía sin relación con el exterior.
- ✓ Existe un stock de capital físico que se encuentra representado con el subíndice *K.*
- ✓ Existe un stock de capital humano que se encuentra representado con un subíndice *H.*
- ✓ Ambos stock de capital se deprecian a una misma tasa constante y exógena

  $\delta_H = \delta_K = \delta$ .
- ✓ Existe una función de producción *Cobb-Douglas.*

### Función de producción agregada (FPA)

Sea una función de producción *Cobb-Douglas* en la que los dos factores de producción son capital físico, *K*, y capital humano, *H.*

$$Y_t = BK_t^{\alpha} H_t^{1-\alpha} \ldots (FPA)$$

$$\text{Siendo} \quad 0 < \alpha < 1$$

Donde

$Y_t$: Producción agregada en el instante "*t*".

$K_t$: Stock de capital físico agregado en el instante "*t*".

$H_t$: Stock de capital humano agregado en el instante "*t*".

$B$: Índice de nivel de tecnología.

$\alpha$ : Elasticidad producto respecto al capital físico.

Esta ecuación dinámica de acumulación de capital físico y de capital humano, en una economía capitalista a través del tiempo.

### 6.2.2 Ecuación Dinámica fundamental

De la condición de equilibrio macroeconómico

$Y_t = C_t + I^b$

$Y_t = C_t + I_K^n + I_K^{rep}$

$BK_t^{\alpha} H_t^{1-\alpha} = C_t + \dot{K}_t + \delta_K + \delta_H + \dot{H}_t$

Resolviendo para: $\dot{H}_t + \dot{K}_t$

$$\dot{K}_t + \dot{H}_t = BK_t^{\alpha} H_t^{1-\alpha} - C - (\delta_K K_t + \delta_H H_t) \text{ La ecuación fundamental}$$

Donde

$\delta_K$ : Tasa de depreciación del stock de capital físico.

$\delta_H$ : Tasa de depreciación del stock de capital humano.

$1-\alpha$ : Elasticidad producto respecto al capital humano.

Esta ecuación dinámica de acumulación de capital físico y de capital humano, en una economía capitalista a través del tiempo.

La ecuación establece que la tasa de cambio del capital físico mas la tasa de cambio del capital humano, son iguales al remanente del producto agregado, respecto al consumo agregado y a la inversión en reposición del capital físico y del capital humano.

## Mercado de capital físico

Las empresas capitalistas maximizan sus beneficios contratando aquella cantidad de capital físico hasta que iguale al producto marginal del capital físico con la tasa de rendimiento bruto de capital.

$$PmgK_{físico} = R_K$$ , la condición de optimización de beneficios

Donde

$R_K$ : Tasa de rendimiento neto de capital físico.

$r_K$ : Tasa de rendimiento del capital físico.

$R_K = r_K + \delta_K$

De la función de producción obtenemos, el producto marginal del capital físico:

$$\underbrace{\frac{\partial Y_t}{\partial K_t}} = \alpha B K_t^{\alpha} H_t^{1-\alpha}$$

$$PmgK_t = \alpha B \underbrace{\frac{K_t^{\alpha}}{K_t} H_t^{1-\alpha}}$$

$$PmgK_t = \alpha PmeK_t$$

**Gráfico [6.10]: El producto medio del capital físico**

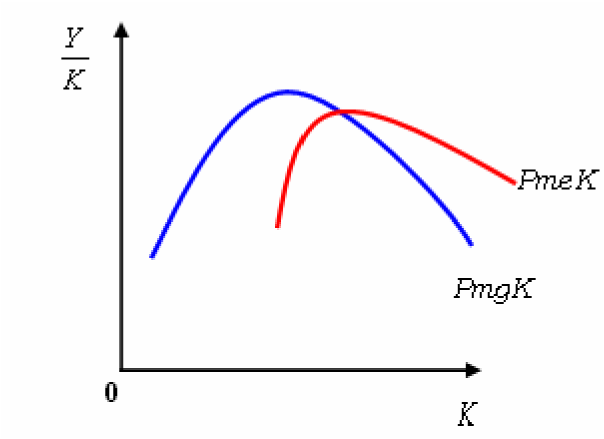
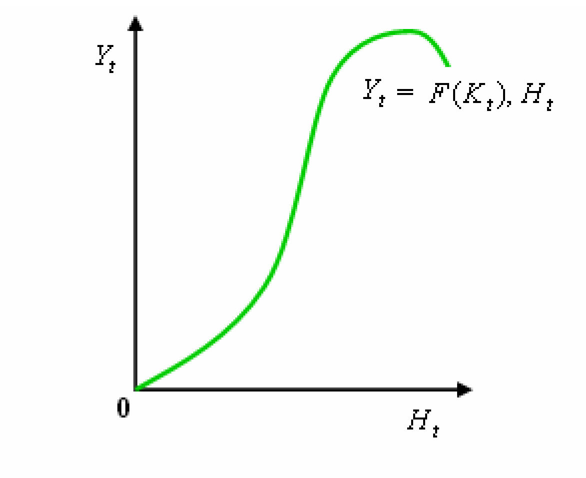



**Gráfico [6.11]: El producto agregado del capital físico con capital humano constante**




## Mercado de capital humano

Las empresas capitalistas maximizan sus beneficios contratando aquella cantidad de capital humano hasta que iguale al producto marginal del capital humano con la tasa de rendimiento bruto de capital.

$PmgH = R_H$ , la condición de optimización de beneficios

Donde

$R_H$ : Tasa de rendimiento neto de capital humano.

$r_H$ : Tasa de rendimiento de capital humano.

$R_H = r_H + \delta_H$

De la función de producción obtenemos, el producto marginal del capital humano:

$$\underbrace{\frac{\partial Y_t}{\partial H_t}}_{} = (1-\alpha)BK_t^{\alpha}H_t^{-\alpha}$$

$$PmgH_t = \alpha BK_t^{\alpha}\frac{H_t^{1-\alpha}}{H_t}$$

$$PmgH_t = (1-\alpha)PmeH$$

**Gráfico [6.12]: El producto medio del capital humano**

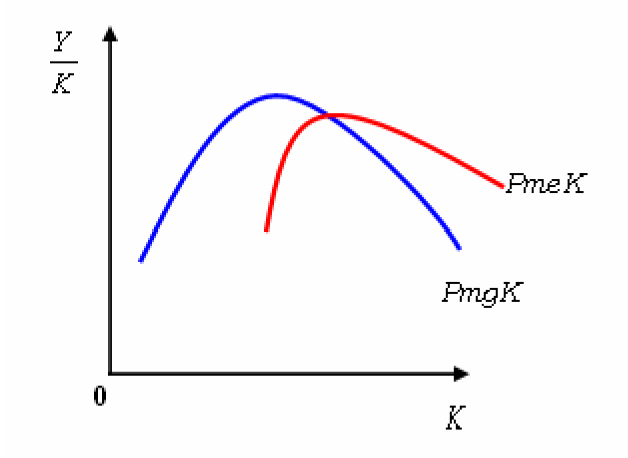
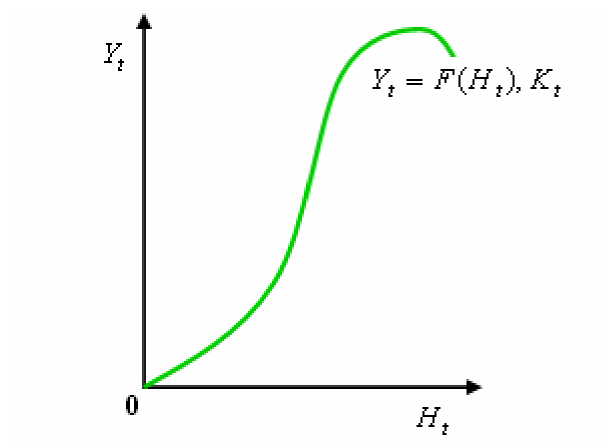



**Gráfico [6.13]: El producto agregado del capital humano con capital físico constante**




### 6.2.3 Transformación de la agregada *Cobb-Douglas*

De la condición de equilibrio macroeconómico

$$Y_t = C_t + I^b$$

$$Y_t = C_t + I_K^n + I_K^{rep}$$

$$BK_t^{\alpha}H_t^{1-\alpha} = C_t + \dot{K}_t + \delta_K + \delta_H + \dot{H}_t$$

Resolviendo para: $\dot{H}_t + \dot{K}_t$

$$\dot{K}_t + \dot{H}_t = BK_t^{\alpha} H_t^{1-\alpha} - C - (\delta_K K_t + \delta_H H_t) \text{ La ecuación fundamental}$$

Donde

$\delta_K$ : Tasa de depreciación del stock de capital físico.

$\delta_H$ : Tasa de depreciación del stock de capital humano.

$1-\alpha$ : Elasticidad producto respecto al capital humano.

Para hallar esta transformación lo primero que tenemos que hacer es, igualar las tasas de rendimiento neto de capital.

De: $R_K = r_K + \delta_K \Rightarrow r_K = R_K - \delta_K$

De: $R_H = r_H + \delta_H \Rightarrow r_H = R_H - \delta_H$

Luego se sabe por uno de los supuestos del modelo que:

$$r_K = r_H$$
$$R_K - \delta_K = R_H - \delta_H$$

Puesto que asumimos por simplicidad que las diversas tasas de interés son iguales, tenemos de la igualdad:

$$\delta_K = \delta_H = \delta$$

Reemplazando esta igualdad en la ecuación anterior se tiene:

$$R_K - \delta = R_H - \delta \Rightarrow \underbrace{R_K}_{PmgK} = \underbrace{R_H}_{pmgH}$$

$$PmgK = pmgH$$

$$\alpha.\underbrace{PmeK}_{\frac{Y_t}{K_t}} = (1-\alpha)\underbrace{pmeH}_{\frac{Y_t}{H_t}}$$

$$\alpha \frac{Y_t}{K_t} = (1-\alpha)\frac{Y_t}{H_t}$$

Resolviendo la ecuación anterior para $\frac{H_t}{K_t}$, qué es la razón de capital humano con respecto al capital físico

$$\frac{H_t}{K_t} = \frac{1-\alpha}{\alpha} \Rightarrow H_t = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)K_t$$

Donde la ecuación obtenida representa el stock de capital humano es una proporción del stock de capital físico.

Ahora para transformar la función de producción:

$Y_t = BK_t^{\alpha} H_t^{1-\alpha}$, pasaremos a reemplazar $H_t = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)K_t$ en la función:

$$Y_t = BK_t^{\alpha}\left(\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)K_t\right)^{1-\alpha} \Rightarrow Y_t = BK_t^{\alpha}\left(\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\right)^{1-\alpha} K_t^{1-\alpha}$$

$$Y_t = B\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{1-\alpha} K_t$$

Como $B\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{1-\alpha} = cte = A$, si reemplazamos este valor en la ecuación obtenemos:

$$Y_t = AK_t$$

Obtenemos la famosa función *AK* o como nosotros lo hemos venido llamando en este libro el modelo *AZ*.

Este en un motivo también consideran al modelo *AZ*, como un modelo en el coexisten capital físico y capital compuesto.

### 6.2.4 Ejercicios resueltos

**Problema #1**

Del modelo de un sector con capital físico y capital humano, se tiene la siguiente función de producción agregada: $Y_t = BK_t^{3/4}H_t^{1/4}$ asuma que las tasas de depresión son iguales

a) Hallar la ecuación dinámica fundamental del modelo
b) Analice el mercado de capital físico.
c) Analice el mercado de capital humano.
d) Halle la razón $\frac{H_t}{K_t}$.

**Rpt:**

a) De la condición de equilibrio macroeconómico tenemos:

$$Y_t = C_t + I^b$$
$$Y_t = C_t + I_K^n + I_K^{rep}$$
$$BK_t^{\alpha}H_t^{1-\alpha} = C_t + \dot{K}_t + \delta_K + \delta_H + \dot{H}_t$$

Resolviendo para: $\dot{H}_t + \dot{K}_t$

Asumiendo que las tasas de interés i depreciación son iguales $\delta_K = \delta_H = \delta$

$$\dot{K}_t + \dot{H}_t = BK_t^{3/4}H_t^{1/4} - C - (K_t + H_t)\delta$$ La ecuación fundamental

b) **Mercado de capital físico**

El mercado de capital físico es de tipo competencia perfecta esto implica:

$$PmgK = R_K \text{ (Rendimiento bruto del capital)}$$

$$\underbrace{\frac{\partial Y_t}{\partial K_t}}_{PmgK} = \frac{3}{4}\frac{BK_t^{3/4}H_t^{1/4}}{K_t} \Rightarrow \frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = \frac{3}{4}\frac{Y_t}{K_t} = \frac{3}{4}PmeK$$

$$PmgK = \frac{3}{4}\frac{Y_t}{K_t}$$

c) **Mercado de capital Humano**

El mercado de capital físico es de tipo competencia perfecta esto implica:

$$PmgK = R_K \text{ (Rendimiento bruto del capital)}$$

$$\underbrace{\frac{\partial Y_t}{\partial H_t}}_{PmgH} = \frac{1}{4}\frac{BK_t^{3/4}H_t^{1/4}}{H_t} \Rightarrow \frac{\partial Y_t}{\partial H_t} = \frac{1}{4}\frac{Y_t}{H_t} = \frac{1}{4}PmeH$$

$$PmgH = \frac{1}{4}\frac{Y_t}{H_t}$$

d) En el equilibrio y bajo el supuesto tenemos:

$$r_K = r_H = r$$

$$r_K = R_K - \delta_K$$
$$r_H = R_H - \delta_H$$

Asumiendo que la depreciación es la misma para los dos mercados $\delta_K = \delta_H = \delta$

$$R_H - \cancel{\delta_H} = R_K - \cancel{\delta_K} \Rightarrow R_K = R_H$$

$$PmgK = PmgH$$

$$\frac{3}{4}\frac{Y_t}{K_t} = \frac{1}{4}\frac{Y_t}{H_t} \Rightarrow \frac{H_t}{K_t} = \frac{4}{3}$$

e) De la función de producción tenemos:

$Y_t = BK_t^{3/4}H_t^{1/4}$ Reemplazando $H_t$ en la función

$$Y_t = BK_t^{3/4}\left(\frac{4K_t}{3_t}\right)^{1/4} \Longrightarrow Y_t = B\left(\frac{4}{3}\right)^{1/4} K_t$$

Si consideramos a $B\left(\frac{4}{3}\right)^{1/4} = cte = A$

Reemplazando en la función nos da; $Y_t = AK_t$ que es la nueva función que tiene la forma del modelo AZ, visto en este libro o como muchos libros lo llaman la función AK.

**Problema #2**

Del modelo de un sector con capital físico y capital humano, se tiene la siguiente función de producción agregada: $Y_t = BK_t^{3/5}H_t^{2/5}$ asuma que las tasas de depresión son iguales

a) Hallar la ecuación dinámica fundamental del modelo
b) Analice el mercado de capital físico.
c) Analice el mercado de capital humano.
d) Halle la razón $\frac{H_t}{K_t}$.

**Rpt:**

a) De la condición de equilibrio macroeconómico tenemos:

$$Y_t = C_t + I^b$$

$$Y_t = C_t + I_K^n + I_K^{rep}$$

$$BK_t^{\alpha} H_t^{1-\alpha} = C_t + \dot{K}_t + \delta_K + \delta_H + \dot{H}_t$$

Resolviendo para: $\dot{H}_t + \dot{K}_t$

Asumiendo que las tasas de interés i depreciación son iguales $\delta_K = \delta_H = \delta$

$$\dot{K}_t + \dot{H}_t = BK_t^{3/5}H_t^{2/5} - C - (K_t + H_t)\delta \quad \text{La ecuación fundamental}$$

b) **Mercado de capital físico**

El mercado de capital físico es de tipo competencia perfecta esto implica:

$$PmgK = R_K \text{ (Rendimiento bruto del capital)}$$

$$\underbrace{\frac{\partial Y_t}{\partial K_t}}_{PmgK = \frac{3}{5}\frac{Y_t}{K_t}} = \frac{3}{5}\frac{BK_t^{3/4}H_t^{1/4}}{K_t} \Longrightarrow \frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = \frac{3}{5}\frac{Y_t}{K_t} = \frac{3}{5}PmeK$$

c) **Mercado de capital Humano**

El mercado de capital físico es de tipo competencia perfecta esto implica:

$$PmgK = R_K \text{ (Rendimiento bruto del capital humano)}$$

$$\underbrace{\frac{\partial Y_t}{\partial H_t}}_{PmgH = \frac{2}{5}\frac{Y_t}{H_t}} = \frac{2}{5}\frac{BK_t^{3/4}H_t^{1/4}}{H_t} \Rightarrow \frac{\partial Y_t}{\partial H_t} = \frac{2}{5}\frac{Y_t}{H_t} = \frac{2}{5}PmeH$$

d) En el equilibrio y bajo el supuesto tenemos:

$$r_K = r_H = r$$

$$r_K = R_K - \delta_K$$
$$r_H = R_H - \delta_H$$

Asumiendo que la depreciación es la misma para los dos mercados $\delta_K = \delta_H = \delta$

$$R_H - \cancel{\delta_H} = R_K - \cancel{\delta_K} \Rightarrow R_K = R_H$$

$$PmgK = PmgH$$

$$\frac{3}{4}\frac{Y_t}{K_t} = \frac{1}{4}\frac{Y_t}{H_t} \Rightarrow \frac{H_t}{K_t} = \frac{2}{3}$$

e) De la función de producción tenemos:

$Y_t = BK_t^{3/5}H_t^{2/5}$ Reemplazando $H_t$ en la función

$$Y_t = BK_t^{3/5}\left(\frac{2K_t}{3}\right)^{2/5} \Rightarrow Y_t = B\left(\frac{2}{3}\right)^{2/5}K_t$$

Si consideramos a $B\left(\frac{2}{3}\right)^{2/5} = cte = A$

Reemplazando en la función nos da; $Y_t = AK_t$ que es la nueva función que tiene la forma del modelo AZ, visto en este libro o como muchos libros lo llaman la función AK.

## 6.3 Modelo de Romer con externalidad del capital

En la década de los años 70 hasta la década de los años 80, se había generado un estancamiento en la teoría del crecimiento, debido a los modelos de crecimiento con progreso tecnológico exógeno.

Pero *Romer* en 1986 con su tesis doctoral, formula un modelo de crecimiento en el que se busca hallar las causas y los orígenes del progreso tecnológico, apara ello *Romer* considera explícitamente los rendimientos decrecientes del capital así como las externalidades del capital.

Con este articulo *Paul Romer* impulso a la literatura del crecimiento económico, por que introdujo la función de producción con externalidades.

### 6.3.1 Supuestos del modelo

- ✓ *Romer* abandona los supuestos de la función de producción agregada sujeta a rendimientos de escala constante, así mismo abandona el supuesto de rendimientos constantes de capital.
- ✓ *Romer* asume una función de producción agregada sujeta a los rendimientos de escala constantes y así mismo va asumir rendimientos crecientes de capital.
- ✓ Supone que existe una externalidad de capital y por simplificación se asume que la población es constante.
- ✓ Se asume que también toda la población trabaja en esta economía.

### Función de producción agregada

La función que refleja las externalidades de la economía es:

$$Y_t = AK_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} \kappa_t^{\eta} \ldots (FPA)$$

Donde

$Y_t$: Producto agregado en el instante "*t*".

$K_t$: Stock de capital agregado en el instante "*t*".

$L_t$: Fuerza de trabajo agregada en el instante "*t*".

$\kappa_t$: Representa la externalidad del capital en el instante "*t*".

$A$: Índice de nivel de tecnología.

$\eta$ : Elasticidad producto respecto a la externalidad del capital.

$\alpha$ : Elasticidad producto respecto al capital.

$1-\alpha$ : Elasticidad producto respecto al trabajo.

Si $\eta = 0$, entonces es una función de producción *Cobb-Douglas.*
Si $\eta > 0$, entonces expresa el grado de importancia de la externalidad del capital con lo cual $\alpha + 1 - \alpha + \eta > 1$.

## Propiedades de la función agregada

**1º.** $F(K_t, L_t) = AK_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} \kappa_t^{\eta}$

Si multiplicamos a la función por un $\lambda > 0$

$F(\lambda K_t, \lambda L_t) = A(\lambda K_t)^{\alpha} (\lambda L_t)^{1-\alpha} \kappa_t^{\eta}$

$F(\lambda K_t, \lambda L_t) = \lambda . Y_t$

La función presenta rendimientos de escala constante cuando $\kappa_t$ permanece constante

**2º.** Los productos marginales del capital y trabajo son positivos.

$$\frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = PmgK = \underbrace{\alpha}_{+} \underbrace{AK_t^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha} \kappa_t^{\eta}}_{+} > 0$$

$$\frac{\partial Y_t}{\partial L_t} = PmgL = \underbrace{(1-\alpha)}_{+} \underbrace{AK_t^{\alpha} L_t^{-\alpha} \kappa_t^{\eta}}_{+} > 0$$

La derivada de los productos marginales es decreciente y negativa.

$$\frac{\partial^2 Y_t}{\partial K_t^2} = \frac{\partial PmgK}{\partial K_t} = \underbrace{\alpha}_{+} \underbrace{(\alpha - 1)}_{-} \underbrace{AK_t^{\alpha-2} L_t^{1-\alpha} \kappa_t^{\eta}}_{+} < 0$$

Recordemos $0 < \alpha < 1$, entonces $0 < \alpha < 1 \ldots -1 \Rightarrow -1 < \alpha - 1 < 0$ es una constante negativa.

$$\frac{\partial^2 Y_t}{\partial L_{tt}^2} = \frac{\partial PmgL}{\partial L_t} = \underbrace{(-\alpha)}_{-} \underbrace{(1-\alpha)}_{+} \underbrace{AK_t^{\alpha} L_t^{-(1+\alpha)} \kappa_t^{\eta}}_{+} > 0$$

Recordemos que $0 < \alpha < 1$, entonces $0 < \alpha < 1 \ldots x - 1 \Rightarrow -1 < -\alpha < 0 \ldots +1$ es una constante positiva $0 < 1 - \alpha < 1$.

**3º.** Veremos que los límites requeridos por las condiciones de INADA se cumplen:

$$\underset{K \to \infty}{Lím}\, PmgK = \alpha \underbrace{\frac{1}{K_t^{1-\alpha}}}_{(1/\infty) \approx 0} . \kappa_t^{\eta} L_t^{1-\alpha} = 0$$

$$\underset{K \to 0}{Lím}\, PmgK = \alpha \underbrace{\frac{1}{K_t^{1-\alpha}}}_{(1/0) \approx \infty} . \kappa_t^{\eta} L_t^{1-\alpha} = \infty$$

$$\underset{L \to \infty}{Lím}\, PmgL = (1-\alpha) K_t^{\alpha} \kappa_t^{\eta} \underbrace{\frac{1}{L_t^{\alpha}}}_{(1/\infty) \approx 0} = 0$$

$$\underset{L \to 0}{Lím}\, PmgL = (1-\alpha) K_t^{\alpha} \kappa_t^{\eta} \underbrace{\frac{1}{L_t^{\alpha}}}_{(1/) \approx \infty} = \infty$$

Con esto se demuestra que la función cumple con las propiedades neoclásicas

*Romer* asume que la externalidad de capital es igual al stock de capital agregado, esto quiere decir que:

$$\kappa_t = k_t$$

Dividiendo a la función de producción entre el numero de trabajadores ($L_t$)

$$\frac{Y_t}{L_t} = AK_t^{\alpha}\frac{L_t^{1-\alpha}}{L_t}\kappa_t^{\eta} \quad \Rightarrow \quad y_t = A\frac{K_t^{\alpha}}{L_t^{\alpha}}\kappa_t^{\eta} \quad \Rightarrow \quad y_t = Ak_t^{\alpha}\kappa_t^{\eta}\ldots(I)$$

Sabemos que $k_t = \kappa_t = K_t / L_t \Rightarrow K_t = k_t L_t \ldots(\psi)$

Reemplazando ($\psi$) en la ecuación (I)

$$y_t = Ak_t^{\alpha}(k_t L_t)^{\eta} \quad \Longrightarrow \quad y_t = Ak_y^{\alpha+\eta}L_t^{\eta}\ldots(FPI)$$

### 6.3.2 Ecuación fundamental

De la ecuación fundamental de *Solow – Swan* mencionada y demostrada en páginas anteriores de este libro tenemos:

$$\dot{k}_t = sf(k_t) - (\delta + n)k_t$$

Donde la FPI se $y_t = Ak_y^{\alpha+\eta}L_t^{\eta}\ldots(FPI)$ y la población es constante: $g_{pob} = n = 0$
Lo que nos da la siguiente ecuación:

$$\dot{k}_t = s.Ak_y^{\alpha+\eta}L_t^{\eta} - (\delta)k_t$$, la ecuación fundamental de *Romer*

Esta ecuación dinámica del proceso de acumulación del capital en una economía capitalista, donde existe una función de producción con rendimientos a escala constantes así como una economía que existe externalidad de capital.

### 6.3.3 Tipología

En el desenvolvimiento de esta economía depende crucialmente de la suma de los paramentos $\alpha + \eta$ , que es inferior o superior o igual a uno, se puede distinguir los siguientes casos.

**Caso *A*:** $\alpha + \eta < 1$

Esto significa que la externalidad no es muy grande, $\eta > 0$ y que la suma de las elasticidades del capital y de la externalidad del capital es menor a la unidad, esto nos dice que presenta rendimientos decrecientes de capital.

En el largo plazo se va llegar a un estado de crecimiento proporcionado, teniendo un equilibrio dinámico de tipo estable, donde el exponente del capital, en la función de ahorro es negativo.

$$\gamma_k = \frac{s.AL_t^{\eta}}{k_t^{1-\alpha-\eta}} - \delta$$

## Versión de *Barro*

Dividiendo entre $k_t$ a la ecuación fundamental nos da:

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t} = \frac{s.Ak_y^{\alpha+\eta}L_t^{\eta}}{k_t} - \delta \quad \Rightarrow \quad \gamma_k = \frac{s.Ak_y^{\alpha+\eta}L_t^{\eta}}{k_t} - \delta$$

En el estado de crecimiento proporcionado $\gamma_k$ es nulo.

Si $\gamma_k = 0$ entonces $\frac{s.Ak_y^{\alpha+\eta}L_t^{\eta}}{k_t} = \delta$ se determina el capital por trabajador óptimo $k_t^*$ de la economía.

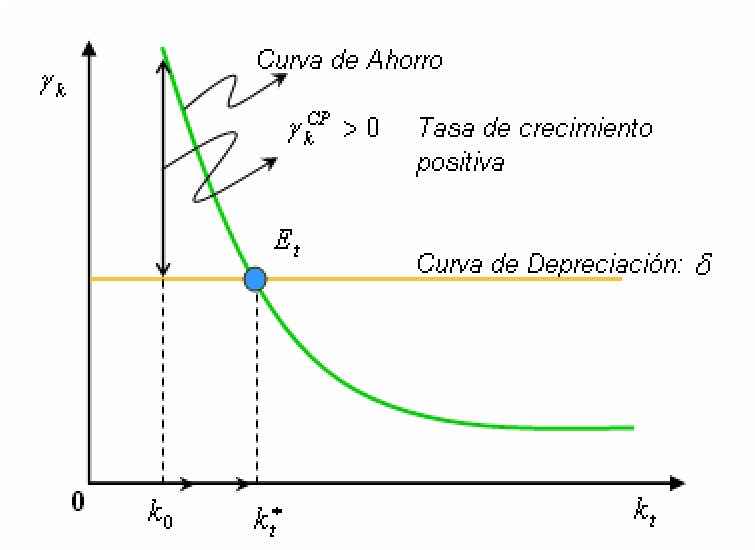
$$k_t^* = \left(\frac{sAL_t^{\eta}}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\eta}}$$

Por lo que la curva de ahorro toma valores infinitos, cuando $k_t$ se aproxima a cero, es decreciente y cuando se aproxima a cero $k_t$ va hacia el infinito, y como vemos en el grafico [6.14], la curva de depreciación en corta en un solo punto a la curva de ahorro y esto genera un estado de crecimiento proporcionado en la economía.

Cuando nos ubicamos a la izquierda del punto, la tasa de crecimiento es positiva, en la economía.

La dinámica del modelo nos dice, que si nos movemos un poquito a la derecha y esto genera una tasa de crecimiento positiva en el corto plazo, y a largo plazo es nulo $\gamma_k^{LP} = 0$.

**Gráfico [6.14]: Caso cuando** $\alpha + \eta < 1$




En este caso, señala que la tasa de crecimiento del capital por trabajador esta correlacionado con el tamaño de la población.

$$\gamma_k = f(tamaño\_de\_la\_población)$$

Esta hipótesis fue falsa debido a que no coincidía con la realidad, por lo que Romer nos dice que este efecto escala es falsa. Por lo que *Romer* asume que la población es constante $n = 0$.[43]

## Efecto Escala

En esta parte hablaremos del efecto escala, que nos dice que la tasa de crecimiento esta correlacionada positivamente con el tamaño de la población.

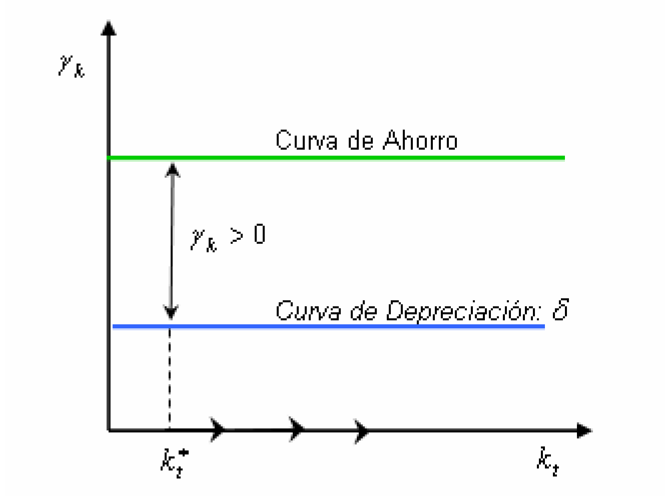
La predicción de este modelo dice que los países con mayor población como: China, Mongolia, Rusia, México, Brasil o la India, que deberían crecer mucho más rápido que los que los países con menor población como: Suecia, Japón, Chile, Manama, Argentina o Perú. Esta predicción se le conoce como "*El efecto escala*", en conclusión lo que nos quiere decir es que los países con mayor escala de población deberían crecer mas.

Esta predicción es falsa como se puede revisar en *Bakus, Kehoe y Kehoe (1992)*, que realiza un estudio para ver los efectos escala, donde tomo los datos los años posteriores a la segunda guerra mundial, donde indico que la tasa de crecimiento per -capita no esta correlacionada ni positivamente ni negativamente con el tamaño del país.[44]

## Caso *B*: $\alpha + \eta = 1$

En este caso las externalidades del capital son grandes y positivas, tal que la suma de las elasticidades del capital y de la externalidades es igual a la unidad, lo cual significa que presenta rendimiento constantes del capital.

**Gráfico [6.15]: Caso cuando** $\alpha + \eta = 1$




Entonces la tasa de crecimiento en la versión de *Barro* pasa a ser $\gamma_k = s.A - \delta$ , esta tasa de crecimiento coincide con el modelo AK, y nos da un Y=AK. Esto significa que en el largo plazo habrá una esta de crecimiento progresivo como se puede apreciar en la grafica [6.15] lo cual implica que el capital por trabajador es indeterminado.

En conclusión en el largo plazo se alcanza un crecimiento progresivo entonces $\gamma_k > 0$ se no alcanza un capital por trabajador por lo que queda indeterminado.

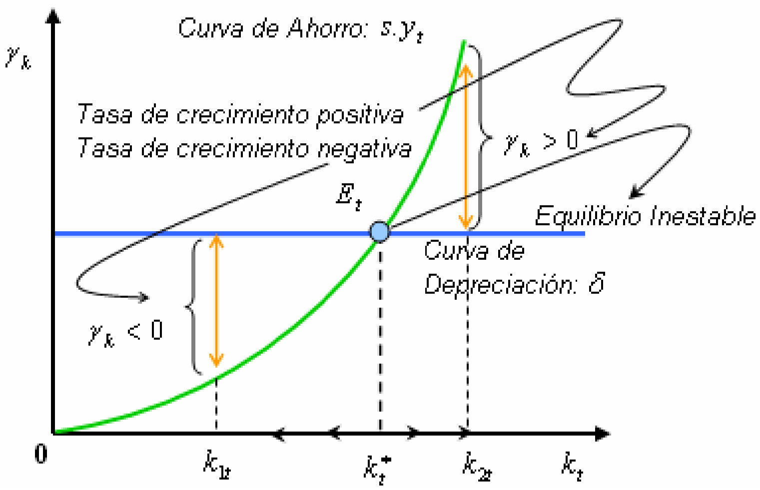
[43] Esta hipótesis fue desmentida por que, en la vida real no se puede dar el caso que la economías que tengan tasas de crecimiento vayan aumentando en el tiempo o que el capital desaparezca con el paso de los años.
[44] Para comprender mejor este efecto léase: Sala-I-Martin Xavier, (1999) "Apuntes de Crecimiento Económico". Segunda edición. Anthoni Bosch editor, Pág.: 150 -152

**Caso *C*:** $\alpha + \eta > 1$

En este caso las externalidad del capital es muy grande, tal que la suma de las elasticidades del capital y de la externalidad es mayor que la unidad, con lo cual se presentan rendimientos decrecientes.

Implicaría es que la economía en el largo plazo, tiende a un estado de crecimiento proporcionado, teniendo la característica central que presenta un equilibrio dinámico estable, donde la tasa de crecimiento es positivo.

**Gráfico [6.16]: Caso cuando** $\alpha + \eta > 1$

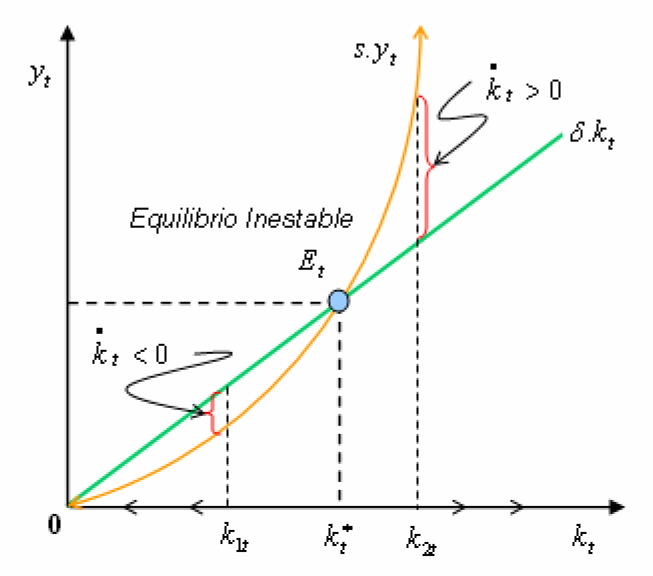



Como se puede apreciar en el grafico [6.16], la curva de ahorro pasa por el origen y es creciente y va hacia el infinito cuando $k_t$ va hacia el infinito. Como las dos curvas se cruzan una sola vez, esto genera un estado proporcionado, donde existe un único $k_t^*$.

El estado proporcionado es inestable como lo hemos mencionado, por que si el stock de capital es un poco superior a $k_t^*$, entonces el crecimiento es positivo. Pero si el stock de capital un inferior a $k_t^*$, entonces la tasa de crecimiento es negativa, el capital disminuye y la economía se aproxima a la extinción (por que existe capital).

Como se puede apreciar en el grafico [6.17], donde la función de ahorro de la sociedad es creciente, y la curva de inversión neta por trabajador es una recta con pendiente positiva. Ente caso la economía converge hacia un punto de equilibrio que se encuentra representado en la grafica como $E_t$, por encima de este punto, ósea el capital que se encuentra a la derecha de este punto obtiene tasa de variación del capital por trabajador positiva, pero si disminuimos un poquito el capital por trabajador, nos ubicaremos al izquierda del punto de equilibrio inestable y en este caso la tasa de variación de capital por trabajador será negativa y menor que la existía originalmente en el equilibrio.

**Gráfico [6.17]: Función de ahorro por trabajador para el caso cuando $\alpha + \eta > 1$**




## 6.4 Modelo de Lucas

Es un modelo sobre la acumulación de capital humano, rendimientos crecientes del capital y donde se considera la externalidad del capital, así como va tomar en cuenta la externalidad que genera la acumulación de capital humano sobre el crecimiento, este modelo es mas complejo que el modelo de *Romer*, por que considera crecimiento optimo.

### 6.4.1 Supuestos del modelo

- ✓ *Lucas* abandona los supuestos de rendimientos a escala constantes y los rendimientos decrecientes del capital.
- ✓ Asume que los rendimientos debe ser a escala creciente y los rendimientos crecientes de capital.
- ✓ Existe una externalidad que es del capital humano.
- ✓ Nos dice que la educación va generar dicha externalidad.

**Función de producción agregada**

Sea una función de producción agregada tipo *Cobb-Douglas*, sujeta a rendimientos crecientes a escala.

$$Y_t = AK_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} \kappa_t^{\mu} \ldots (FPA)$$
$$s.a: \quad \alpha + (1-\alpha) + \mu > 1$$

Donde

$Y_t$: Producto agregado en el instante "*t*".

$K_t$: Stock de capital agregado en el instante "*t*".

$L_t$: Fuerza de trabajo agregada en el instante "*t*".

$\kappa_t$: Representa la externalidad del capital en el instante "*t*".

$A$: Índice de nivel de tecnología.

Ejercicios de Crecimiento Económico

$\eta$ : Elasticidad producto respecto a la externalidad del capital.

$\mu$ : Elasticidad producto respecto a la externalidad del capital humano.

$1-\alpha$ : Elasticidad producto respecto al trabajo.

Para empezar asumiremos, siguiendo a *Lucas* (1988) asume que la externalidad de capital es igual al stock de capital agregado, esto quiere decir que:

$$\kappa_t = k_{tt}$$

Dividiendo a la función de producción agregada entre la cantidad de trabajadores de la economía tenemos:

$$\frac{Y_t}{L_t} = AK_t^{\alpha}\frac{L_t^{1-\alpha}}{L_t}\kappa_t^{\mu}$$

Reemplazando este supuesto en la función de producción agregada nos da:

$$y_t = A\frac{K_t^{\alpha}}{L_t^{\alpha}}\frac{L_t^{1-\alpha}}{L_t^{1-\alpha}}\kappa_t^{\mu} = Ak_t^{\alpha}\kappa_t^{\mu} \quad \Longrightarrow \quad y_t == Ak_t^{\alpha+\mu}\ldots(FPI)$$

### 6.4.2 Ecuación fundamental

De la ecuación fundamental de *Solow – Swan* mencionada y demostrada en páginas anteriores de este libro tenemos:

$$\dot{k}_t = sf(k_t) - (\delta + n)k_t$$

Donde la FPI se $y_t = Ak_y^{\alpha+\mu}\ldots(FPI)$

Lo que nos da la siguiente ecuación:

$$\dot{k}_t = s.Ak_y^{\alpha+\mu} - (\delta + n)k_t$$ , la ecuación fundamental de *Lucas*

Esta ecuación dinámica de proceso de acumulación del capital en una economía capitalista, con rendimientos de escala creciente, externalidad del capital humano y con acumulación de capital humano.

### 6.4.3 Análisis

En el desenvolvimiento de esta economía depende crucialmente de la suma de los paramentos $\alpha + \mu$ , que es inferior o superior o igual a uno, se puede distinguir los siguientes casos.

**Caso *A*:** $\alpha + \mu < 1$

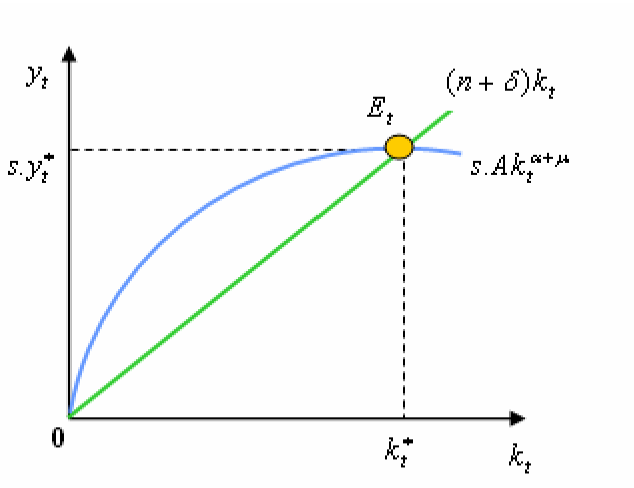
Esto significa que la externalidad del capital humano no es muy grande, $\mu > 0$ 0 y que la suma de las elasticidades del capital humano y de la externalidad del capital físico es menor a la unidad, esto nos dice que presenta rendimientos decrecientes de capital.

Cuya consecuencia es que dicha economía en el largo plazo tiende a un estado de crecimiento proporcionado como se puede apreciar en la grafico [6.18], donde se llega a un estado de crecimiento proporcionado en $E_t$. En dicho estado de crecimiento proporcionado la variable $\dot{k}_t$ es nulo.

Si $\dot{k}_t = 0$ entonces $s.Ak_t^{\alpha+\mu} = (n+\delta)k_t$ se determina el capital por trabajador óptimo $k_t^*$

$$\frac{s.A}{n+\delta} = \frac{k_t}{k_t^{\alpha+\mu}} \Rightarrow k_t^* = \left(\frac{s.A}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\mu}}$$

**Gráfico [6.18]: La función de ahorro por trabajador y la curva ampliada bruta de capital**




**Versión de *Barro***

Dividiendo entre $k_t$ la ecuación fundamental del modelo

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t} = \frac{s.Ak_t^{\alpha+\mu}}{k_t} - (\delta + n) \Rightarrow \gamma_k = \frac{s.Ak_t^{\alpha+\mu}}{k_t} - (\delta + n)$$

En el estado de crecimiento proporcionado $\gamma_k$ es nulo.

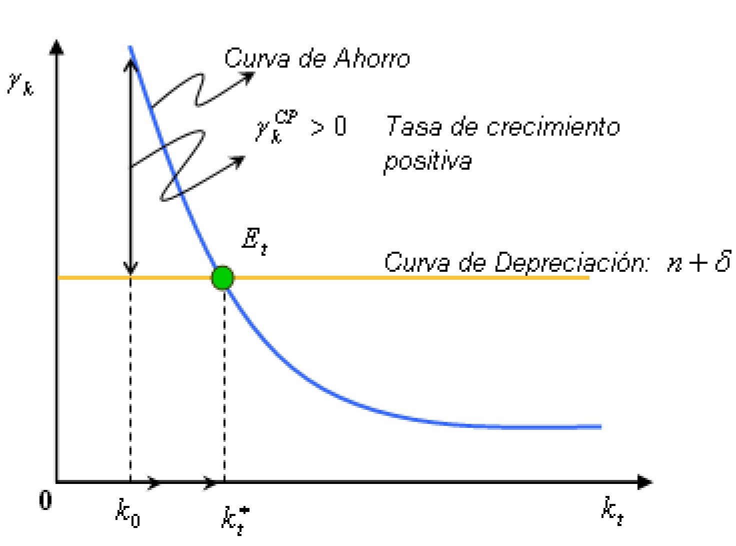
Si entonces $\frac{s.Ak_t^{\alpha+\mu}}{k_t} = (\delta + n)$, se determina el capital por trabajador óptimo ($k_t^*$) de la economía.

$$k_t^* = \left(\frac{s.A}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\mu}}$$

Por lo que la curva de ahorro toma valores infinitos, cuando $k_t$ se aproxima a cero, es decreciente y cuando se aproxima a cero $k_t$ va hacia el infinito, y como vemos en el grafico [6.19], la curva de depreciación en corta en un solo punto a la curva de ahorro y esto genera un estado de crecimiento proporcionado en la economía.

Cuando nos ubicamos a la izquierda del punto, la tasa de crecimiento es positiva, en la economía. La dinámica del modelo nos dice, que si nos movemos un poquito a la derecha y esto genera una tasa de crecimiento positiva en el corto plazo, y a largo plazo es nulo $\gamma_k^{LP} = 0$.

**Gráfico [6.19]: Caso cuando** $\alpha + \mu < 1$




**Caso *B*:** $\alpha + \mu = 1$

En este caso la elasticidad de la externalidad de capital humano es, de magnitud regular, tal que la suma de las elasticidades del capital físico y de la externalidades de dicho capital humano es igual a la unidad.

**Versión de *Barro***

Dividiendo la ecuación de *Lucas* entre $k_t$ obtenemos:

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t} = \frac{s.Ak_y^{\alpha+\mu}}{k_t} - (\delta + n)$$

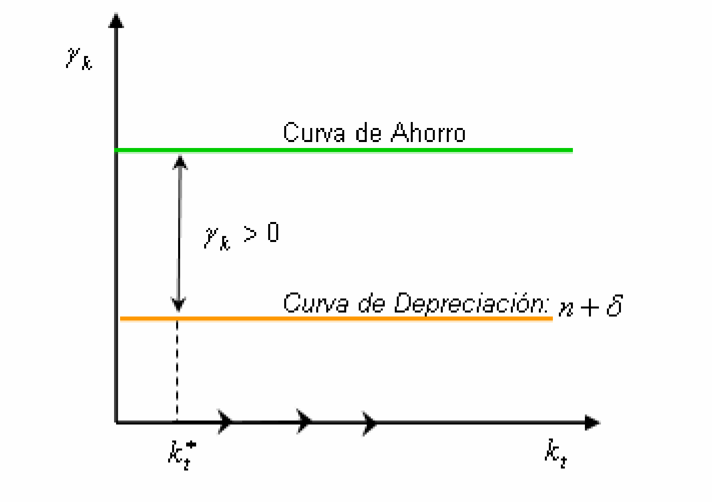
$$\gamma_k = \frac{s.Ak_y^{\alpha+\mu}}{k_t} - (\delta + n)$$

En este caso existe un estado de crecimiento progresivo por que las curvas de ahorro y depreciación no se cortan en un punto.

Si la tasa de crecimiento es positiva $\gamma_k > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{s.Ak_y^{\alpha+\mu}}{k_t} > (\delta + n)$

En conclusión en el largo plazo se alcanza un crecimiento progresivo $\gamma_k > 0$, pero el capital por trabajador queda indeterminado en este caso.

**Gráfico [6.20]: Caso cuando** $\alpha + \mu = 1$

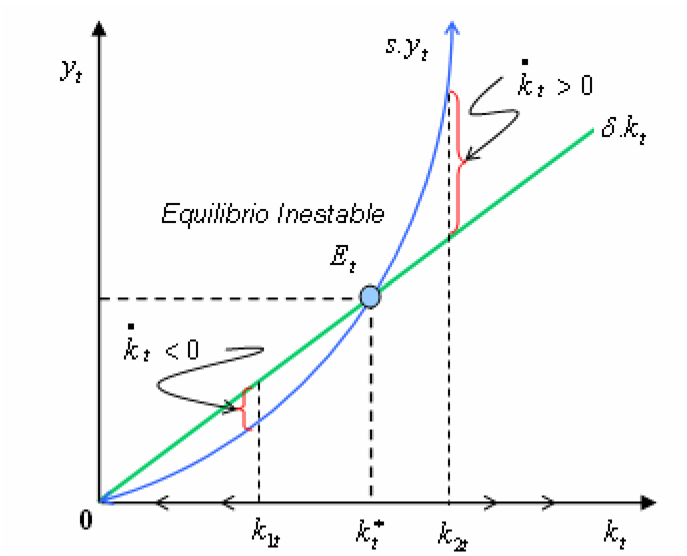



**Caso *C*:** $\alpha + \mu > 1$

En este caso la externalidad del capital humano es grande, de tal modo que la suma de las elasticidades del capital físico y de la externalidad supera a la unidad, con lo cual se presenta rendimientos decrecientes del capital.

Cuya implicancia es que dicha economía en el largo plazo, modo se puede a preciar en el grafico [6.21], va tender a un estado de crecimiento proporcionado en $E_t$, con la característica clave de presentar un equilibrio dinámico de tipo inestable, como señala el gráfico de este caso.

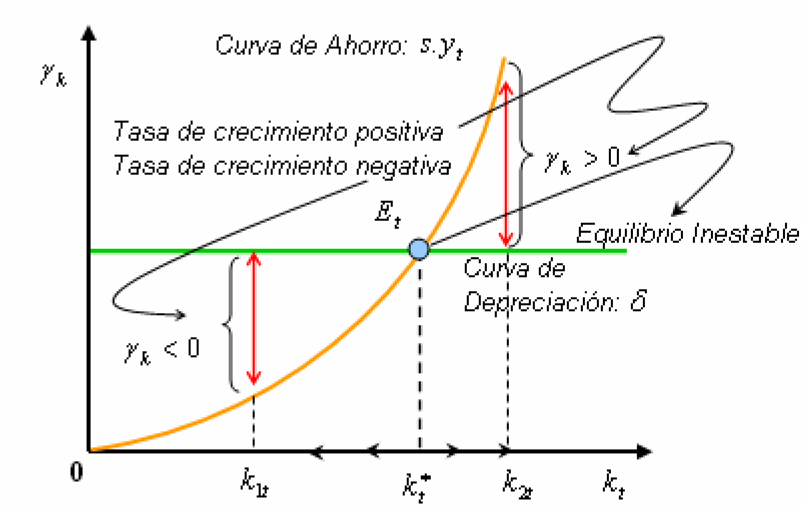
**Gráfico [6.21]: Caso cuando** $\alpha + \mu > 1$




**Versión de Barro**

El estado proporcionado es inestable como lo hemos mencionado, por que si el stock de capital es un poco superior a $k_t$, entonces el crecimiento es positivo, como se aprecia en el gráfico [6.22]. Pero si el stock de capital un inferior en el $k_t$, entonces la tasa de crecimiento es negativa, el capital disminuye y la economía se aproxima a la extinción (por que existe capital).

**Gráfico [6.21]: Curva de ahorro creciente en el caso cuando** $\alpha + \mu > 1$




Dividiendo a la ecuación fundamental de *Lucas – Martín* entre $k_t$

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t} = \frac{s.Ak_y^{\alpha+\mu}}{k_t} - (\delta + n)$$

$$\gamma_k = \frac{s.Ak_y^{\alpha+\mu}}{k_t} - (\delta + n)$$

En el estado de crecimiento proporcionado tasa de crecimiento es nula

Si $\gamma_k = 0$, entonces $\frac{s.Ak_y^{\alpha+\mu}}{k_t} = (\delta + n)$ se determina el capital por trabajador óptimo $k_t^*$.

$$k_t^* = \left(\frac{s.A}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\mu}}$$



Ejercicios de Crecimiento Económico

## 6.5 Modelo de crecimiento con gobierno

En esta parte estudiaremos el tamaño del gobierno, donde el gobierno dedica sus acciones, (carreteras, empresas, tecnología, parques públicos, hospitales, subsidios, etc.), para el beneficio de la sociedad. Para financiar estas acciones el gobierno cobra impuestos (a la renta, la rentabilidad de las inversiones privadas, IGV, etc.) y veremos como estos impuestos están relacionados con la tasa de crecimiento de la economía.

También es esta parte veremos que el tamaño del gasto publico y su relación con el crecimiento económico, veremos los caso del aspecto positivo de tener gasto publico y los aspectos negativos de tener que financiar dicho gasto.

Para comenzar diremos que este modelo fue desarrollado por *Robert Barro (1990)* y es una extensión del modelo de *Solow*, según el cual nos dice que el gasto publico es productivo y para esto nos propone una función de producción con dos factores: Capital privado $K_t$ y el gasto del sector publico $G_t$ .

***Sector Público***

- ***Gasto Fiscal***: El estado propone bienes públicos a la sociedad (Educación, salud, seguridad, defensa nacional, etc.)
- ***Ingreso Fiscal:*** Como consigue el gobierno solventar el gasto vía tributación.

### 6.5.1 Supuestos del modelo

A los supuestos básicos del modelo de *Solow* se le añaden los siguientes supuestos:

- ✓ Existe estado.
- ✓ Existe el sector público.
- ✓ Hay gasto público: El estado proporciona bienes públicos.
- ✓ Existe gasto de gobierno: Refleja el hecho de que hay bienes públicos.
- ✓ La tributación es la única fuente de ingreso.
- ✓ La tributación es proporcional a la renta, dado la tasa marginal de tributación.
- ✓ En el largo plazo existe un equilibrio fiscal.
- ✓ La función de producción agregada considera el stock de capital privado y el gasto público.
- ✓ El ahorro depende directamente de la renta disponible., dado la propensión marginal ahorrar.
- ✓ Existe solo un impuesto y es a ala renta.

### Función de producción agregada

Sea una función de producción tipo *Cobb-Douglas*, donde interviene además del stock de capital privado, el gasto de gobierno.

$$Y_t = AK_t^{\alpha} G_t^{1-\alpha} \ldots (FPA)$$

$$s.a: \ 0 < \alpha < 1$$

Donde

$Y_t$: Producto agregado en el instante "*t*".

$K_t$: Stock de capital privado en el instante "*t*".
$G_t$: Volumen del gasto en el instante "*t*".
$A$: Índice de nivel de tecnología.
$\alpha$ : Elasticidad producto respecto al capital privado.

Dividiendo a la función de producción entre la cantidad de trabajadores de la economía

$$\frac{Y_t}{L_t} = A\frac{K_t^{\alpha} G_t^{1-\alpha}}{L_t} \Rightarrow y_t = A\frac{K_t^{\alpha}}{L_t^{\alpha}}\frac{G_t^{1-\alpha}}{L_t^{1-\alpha}} \Rightarrow \qquad y_t = Ak_t^{\alpha} g_t^{1-\alpha} \ldots (FPI)$$

Donde
$g_t$: Gasto de gobierno por trabajador en el instante "*t*".
$y_t$: Producto per cápita en el instante "*t*".
$k_t$: Stock de capital por trabajador en el instante "*t*".

**Propiedades de la función de producción**

**1º.** $F(K_t, L_t) = AK_t^{\alpha} G_t^{1-\alpha}$

Si multiplicamos a la función por un $\lambda > 0$

$F(\lambda K_t, \lambda G_t) = A(\lambda K_t)^{\alpha}(\lambda G_t)^{1-\alpha}$

$F(\lambda K_t, \lambda L_t) = \lambda . Y_t$

La función presenta rendimientos de escala constante

**2º.** Los productos marginales del capital y trabajo son positivos.

$$\frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = PmgK = \underbrace{\alpha}_{+}\underbrace{AK_t^{\alpha-1}G_t^{1-\alpha}}_{+} > 0$$

$$\frac{\partial Y_t}{\partial G_t} = PmgL = \underbrace{(1-\alpha)}_{+}\underbrace{AK_t^{\alpha}G_t^{-\alpha}}_{+} > 0$$

La derivada de los productos marginales es decreciente y negativa.

$$\frac{\partial^2 Y_t}{\partial K_t^2} = \frac{\partial PmgK}{\partial K_t} = \underbrace{\alpha}_{+}\underbrace{(\alpha-1)}_{-}\underbrace{AK_t^{\alpha-2}L_t^{1-\alpha}}_{+} < 0$$

Recordemos $0 < \alpha < 1$, entonces $0 < \alpha < 1 \ldots -1 \Rightarrow -1 < \alpha - 1 < 0$ es una constante negativa.

$$\frac{\partial^2 Y_t}{\partial G_t^2} = \frac{\partial PmgG}{\partial G_t} = \underbrace{(-\alpha)}_{-}\underbrace{(1-\alpha)}_{+}\underbrace{AK_t^{\alpha}G_t^{-(1+\alpha)}}_{+} > 0$$

Recordemos que $0 < \alpha < 1$, entonces $0 < \alpha < 1 \ldots x - 1 \Rightarrow -1 < -\alpha < 0 \ldots +1$ es una constante positiva $0 < 1-\alpha < 1$.

**3º.** Veremos que los límites requeridos por las condiciones de INADA se cumplen:

$$(1/\infty) \approx 0$$

$$\underset{K\to\infty}{Lím}\, PmgK = \alpha \frac{1}{\cancel{K_t^{1-\alpha}}}.G_t^{1-\alpha} = 0$$

$$(1/0) \approx \infty$$

$$\underset{K\to 0}{Lím}\, PmgK = \alpha \frac{1}{\cancel{K_t^{1-\alpha}}}.G_t^{1-\alpha} = \infty$$

$$(1/\infty) \approx 0$$

$$\underset{L\to\infty}{Lím}\, PmgG = (1-\alpha)K_t^{\alpha} \frac{1}{\cancel{G_t^{\alpha}}} = 0$$

$$(1/) \approx \infty$$

$$\underset{L\to 0}{Lím}\, PmgG = (1-\alpha)K_t^{\alpha} \frac{1}{\cancel{G_t^{\alpha}}} = \infty$$

Ahora demostraremos que la función obtenida cumple con las propiedades Neoclásicas. Para esto deberemos asumir que $0 < \alpha < 1$

### 6.5.2 Ecuación fundamental

De la condición de equilibrio macroeconómico en una economía cerrada tenemos:

$$Y_t = C_t + I^b + G_t$$

De las identidades: $C_t = Pmgc.Yd$

$$Yd = Y_t - T = Y_t - \tau .Y_t$$

$$I^b = \dot{K}_t + \delta .K_t \Rightarrow \frac{I^b}{L_t} = \frac{\dot{K}_t}{L_t} + \delta k_t$$

$$\frac{\dot{K}_t}{L_t} = \dot{k}_t + nk_t$$

$$\frac{I^b}{L_t} = \dot{k}_t + (n+\delta)k_t$$

$$Pmgc + Pmgs = 1 \Rightarrow 1 - c = s$$

En el largo plazo existe un equilibrio fiscal (Por que no se permiten la existencia de déficit público).

$$G_t = T = \tau .Y_t$$

Reemplazando todas las identidades antes mencionadas en las líneas anteriores

$$Y_t = Pmgc.Yd + \dot{K}_t + \delta K_t + \tau .Y_t$$

$$Y_t = c.(1-\tau)Y_t + \dot{K}_t + \delta K_t + \tau .Y_t$$

$$Y_t = (1-c).(1-\tau) + \dot{K}_t + \delta K_t$$

Dividiendo la ecuación anterior entre la cantidad de trabajadores de la economía y reemplazando la identidad $1 - c = s$

$$\frac{Y_t}{L_t} = (1-c).(1-\tau) + \frac{\dot{K}_t}{L_t} + \delta \frac{K_t}{L_t}$$

$$y_t = s.(1-\tau) + \dot{k}_t + (\delta + n)k_t$$

Despejando $\dot{k}_t$ reemplazando la (FPI)

$$\dot{k}_t = s.(1-\tau)Ak_t^{\alpha} g_t^{1-\alpha} - (n+\delta)k_t$$, la ecuación fundamental con sector público

Esta ecuación función diferencial del proceso de acumulación de capital en una economía capitalista con sector publico.

Estable que la tasa de cambio de capital por trabajador es el remanente del ahorro bruto disponible por trabajador respecto a la ampliación bruta de capital.

Donde
$\tau$ : representa la tasa marginal de tributación.
$k_t$ : Capital por trabajador.
$\delta$ : Tasa de depreciación del stock de capital.
$s$ : Representa el producto marginal ahorrar.
$g_t$ : Gasto de gobierno por trabajador.
$n$ : Tasa de crecimiento de la población.

**Versión de *Barro***

Dividiendo a la ecuación fundamental entre $k_t$

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t} = s.(1-\tau)A\frac{k_t^{\alpha}}{k_t} g_t^{1-\alpha} - (n+\delta)$$

$$\gamma_k = s.(1-\tau)A\frac{k_t^{\alpha}}{k_t} g_t^{1-\alpha} - (n+\delta)\ldots(I)$$

Donde
$\gamma_k$ : Tasa decrecimiento por trabajador.

En el largo plazo no existe desequilibrio fiscal

$$G_t = T \quad \Rightarrow \quad G_t = \tau.Y_t$$

Dividiendo a la ecuación anterior entre la cantidad de trabajadores de la economía

$$\frac{G_t}{L_t} = \tau\frac{Y}{L_t} \quad \Rightarrow \quad g_t = \tau.y_t$$ Donde: $y_t = Ak_t^{\alpha} g_t^{1-\alpha}$

$$g_t = \tau.Ak_t^{\alpha} g_t^{1-\alpha} \quad \Rightarrow \quad g_t = \left[\tau.Ak_t^{\alpha}\right]^{1/\alpha}\ldots(II)$$

Reemplazando la ecuación (II) en la ecuación (I) y dividiendo la ecuación entre el numero de trabajadores de la economía ($k_t$)

$$\gamma_k = s(1-\tau)A\frac{k_t^{\alpha}}{k_t}\left[(\tau A)^{1/\alpha} k_t\right]^{1-\alpha} - (n+\delta)$$

$$\gamma_k = s(1-\tau)A^{\frac{1}{\alpha}}.\tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - (n+\delta)$$

### 6.5.3 Análisis

En esta parte analizaremos los casos, cuando la tasa marginal de tributación es cero, el cien por ciento y el caso intermedio.

**Caso I:** $\tau = 0$ (cuando la tasa marginal de tributación es nula)

Si la tasa marginal de tributación es nula, entonces el ingreso fiscal será nulo y esto significa, que no habrá financiamiento para el gasto de gobierno (educación pública, Salud pública, seguridad pública, defensa, justicia, etc.)

Esto implica que en esta economía habrá protesta popular, rebeliones, etc. La tasa de crecimiento de capital por trabajador será negativa.

Si $\tau = 0$ entonces $\gamma_k = s(1-0)A^{\frac{1}{\alpha}}.0^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - (n+\delta)$

$$\gamma_k = -(n+\delta)$$

**Caso II:** $\tau = 1$ (cuando la tasa marginal de tributación es del cien por ciento)

El estado va obtener recursos de los productores, entonces para los productores no va haber incentivos para producir, entonces va ver disminución del nivel de producción y va haber salida de capitales en el país.

Esto implica que se obtendrá una tasa de crecimiento de capital por trabajador negativa.

Si $\tau = 1$ entonces $\gamma_k = s(1-1)A^{\frac{1}{\alpha}}.1^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - (n+\delta)$

$$\gamma_k = -(n+\delta)$$

**Caso III:** $0 < \tau < 1$ (caso intermedio)

En este caso intermedio el estado va obtener ingresos fiscales y a su vez las empresas s e van a sentir incentivadas a producir. De otro lado dicha tasa de tributación $\tau$ , se puede financiar dicho gasto público

Si $0 < \tau < 1$ entonces $\gamma_k = s(1-\tau)A^{\frac{1}{\alpha}}.\tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - (n+\delta)$

Para maximizar la función se puede hallar igualando a cero la derivada de la tasa de crecimiento con respecto a $\tau$ .

$$\frac{\partial\gamma_k}{\partial\tau} = 0$$

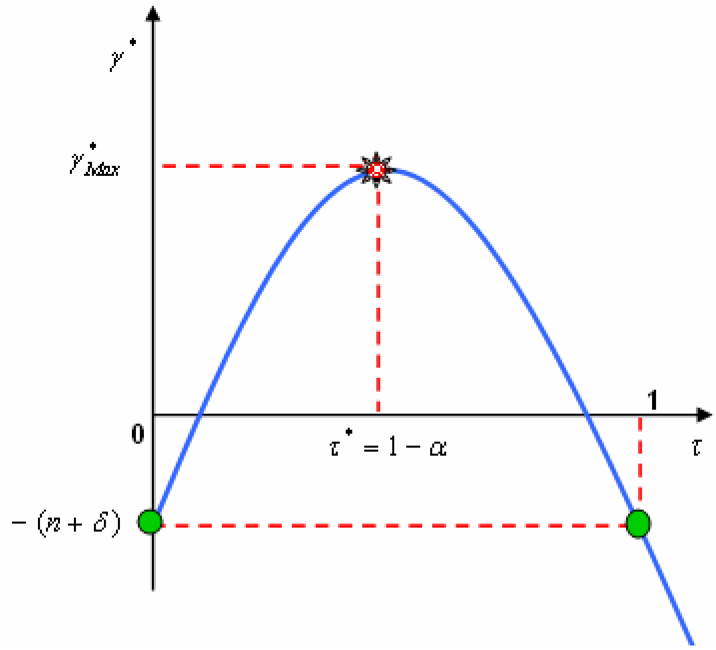
$$\partial\frac{\gamma_k}{\partial\tau} = sA^{\frac{1}{\alpha}}\left[\frac{1-\alpha}{\alpha}\right].\tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}-1} - \frac{s.A^{1/\alpha}}{\alpha}.\tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$$

$$\partial\frac{\gamma_k}{\partial\tau}=\underbrace{sA^{\frac{1}{\alpha}}\tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}_{>0}\underbrace{\left[\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{1}{\tau}-\frac{1}{\alpha}\right]}_{=0}=0$$

$$\left[\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{1}{\tau^*}-\frac{1}{\alpha}\right]=0 \Longrightarrow \tau^*=1-\alpha$$

Por lo que el tipo impositivo que maximiza la tasa de crecimiento de la economía es $\tau^*=1-\alpha$.

**Gráfico [6.23]: Relación entre $\tau$ y tasa de crecimiento de la economía**




### 6.5.4 Problemas resueltos

#### Problema Nº1

Del modelo de crecimiento con sector publico, se tiene la función de producción dinámica $Y_t=36K_t^{3/4}G_t^{1/4}$ se sabe que el ahorro agregado es del 36% del producto agregado cada año, la tasa de depreciaciones 6.5% cada año y la fuerza de trabajo es 2.5% al año. Se pide hallar:

a) La ecuación fundamenta con sector público.
b) Hallar la tasa de crecimiento del capital por trabajador.
c) Hallar la tasa de tributación que maximiza la tasa de crecimiento de la economía.
d) Hallar la tasa de crecimiento de la economía.

**Rpt:**

***6*** Dividiendo entre $L_t$ a la función de producción agregada de la economía

$$\frac{Y_t}{L_t}=36\frac{K_t^{3/4}}{L_t^{3/4}}\frac{G_t^{1/4}}{L_t^{1/4}} \Longrightarrow y_t=36k_t^{3/4}g_t^{1/4}\ldots(FPI)$$

De la condición de equilibrio macroeconómico en una economía cerrada tenemos:

$$Y_t = C_t + I^b + G_t$$

Reemplazando todas las identidades

$$Y_t = Pmgc.Yd + \dot{K}_t + \delta K_t + \tau .Y_t$$

$$Y_t = c.(1-\tau)Y_t + \dot{K}_t + \delta K_t + \tau .Y_t$$

$$Y_t = (1-c).(1-\tau) + \dot{K}_t + \delta K_t$$

Dividiendo la ecuación anterior entre la cantidad de trabajadores de la economía y reemplazando la identidad $1-c=s$

$$\frac{Y_t}{L_t} = (1-c).(1-\tau) + \frac{\dot{K}_t}{L_t} + \delta \frac{K_t}{L_t}$$

$$y_t = s.(1-\tau) + \dot{k}_t + (\delta + n)k_t$$

Despejando $\dot{k}_t$ reemplazando la (FPI)

$$\dot{k}_t = 0.36(1-\tau)36k_t^{3/4}g_t^{1/4} - 0.09k_t$$ , la ecuación fundamental

***7*** De la condición fundamental dividiendo entre el capital por trabajador $k_t$

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t} = 0.36(1-\tau)36\frac{k_t^{3/4}}{k_t}g_t^{1/4} - 0.09\ldots(\xi)$$

$$G_t = \tau .Y_t \Rightarrow \frac{G_t}{L_t} = \tau .\frac{Y_t}{L_t} \qquad g_t = \tau .(36k_t^{3/4}g_t^{1/4}) \Rightarrow g_t = (36.\tau)^{4/3}k_t\ldots(\psi)$$

Reemplazando $(\psi)$ en la ecuación $(\xi)$ y dividiendo entre $k_t$

$$\gamma_k = 0.36(1-\tau)36\frac{k_t^{3/4}}{k_t}\left[(36\tau)^{4/3}k_t\right]^{1/4} - 0.09$$

Representa esta ecuación la tasa de crecimiento por trabajador

***8*** Como se asume $0<\tau<1$ en este caso intermedio, donde el estado de crecimiento de la economía se maximiza

$$\frac{\partial \gamma_k}{\partial \tau^*} = 0$$

$$\frac{\partial \gamma_k}{\partial \tau^*} = 0.36x(36)^{1/3}x\frac{1}{3}x\tau^{-2/3} - \frac{4}{3}0.36x(36)^{1/3}x\tau^{1/3}$$

$$\frac{\partial \gamma_k}{\partial \tau^*} = 0.36x(36)^{4/3}x\tau^{1/3}\left[\frac{1}{3}x\frac{1}{\tau} - \frac{4}{3}\right] = 0$$

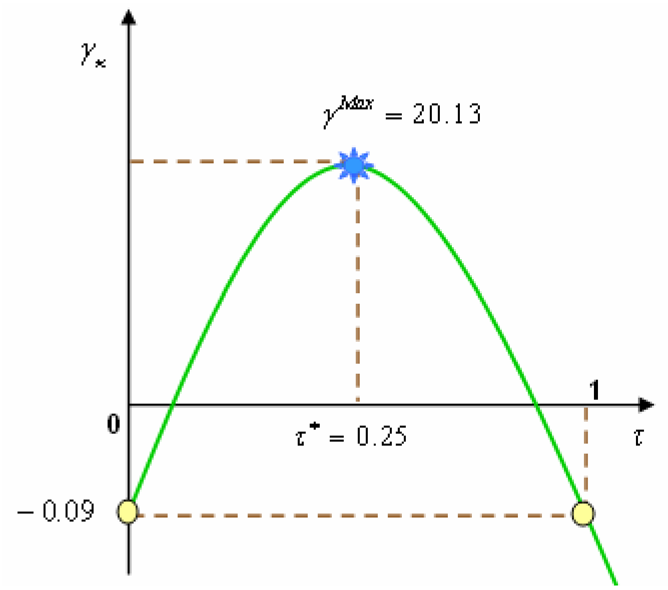
$$\left[\frac{1}{3}x\frac{1}{\tau}-\frac{4}{3}\right]=0 \quad \Longrightarrow \quad \tau^{*}=0.25\approx 25\%$$

***9*** De la tasa de crecimiento por trabajador tenemos

$$\gamma_k^{Máx}=0.36(1-0.25)36[36x0.25]^{1/3}-(0.09)$$

$$\gamma_k^{Máx}=20.1284$$

**Gráfico del problema Nº1**




**Problema Nº2**

Del modelo de crecimiento con sector publico, se tiene la función de producción dinámica $Y_t=25K_t^{4/5}G_t^{1/5}$ se sabe que el ahorro agregado es del 35% del producto agregado cada año, la tasa de depreciaciones 7% cada año y la fuerza de trabajo es 2% al año. Se pide hallar:

a) La ecuación fundamenta con sector público.
b) Hallar la tasa de crecimiento del capital por trabajador.
c) Hallar la tasa de tributación que maximiza la tasa de crecimiento de la economía.
d) Hallar la tasa de crecimiento de la economía.

**Rpt:**

✓ Dividiendo entre $L_t$ a la función de producción agregada de la economía

$$\frac{Y_t}{L_t}=36\frac{K_t^{4/5}}{L_t^{4/5}}\frac{G_t^{1/5}}{L_t^{1/5}} \quad \Longrightarrow \quad y_t=25k_t^{4/5}g_t^{1/5}\ldots(FPI)$$

De la condición de equilibrio macroeconómico en una economía cerrada tenemos:

$$Y_t = C_t + I^b + G_t$$

Reemplazando todas las identidades

$$Y_t = Pmgc.Yd + \dot{K}_t + \delta K_t + \tau .Y_t$$

$$Y_t = c.(1-\tau)Y_t + \dot{K}_t + \delta K_t + \tau .Y_t$$

$$Y_t = (1-c).(1-\tau) + \dot{K}_t + \delta K_t$$

Dividiendo la ecuación anterior entre la cantidad de trabajadores de la economía y reemplazando la identidad $1-c=s$

$$\frac{Y_t}{L_t} = (1-c).(1-\tau) + \frac{\dot{K}_t}{L_t} + \delta \frac{K_t}{L_t}$$

$$y_t = s.(1-\tau) + \dot{k}_t + (\delta + n)k_t$$

Despejando $\dot{k}_t$ reemplazando la (FPI)

$$\dot{k}_t = 0.35(1-\tau)25k_t^{34/5}g_t^{1/5} - 0.09k_t$$ , la ecuación fundamental

✓ De la condición fundamental dividiendo entre el capital por trabajador $k_t$

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t} = 0.35(1-\tau)25\frac{k_t^{4/5}}{k_t}g_t^{1/5} - 0.09\ldots(\xi)$$

$$G_t = \tau .Y_t \Rightarrow \frac{G_t}{L_t} = \tau .\frac{Y_t}{L_t}$$

$$g_t = \tau .(25k_t^{3/4}g_t^{1/4}) \Rightarrow g_t = (25\tau)^{4/3}k_t \ldots(\psi)$$

Reemplazando ($\psi$) en la ecuación ($\xi$) y dividiendo entre $k_t$

$$\gamma_k = 0.35(1-\tau)25\frac{k_t^{4/5}}{k_t}\left[(25\tau)^{4/5}k_t\right]^{1/5} - 0.09$$

Representa esta ecuación la tasa de crecimiento por trabajador

✓ Como se asume $0<\tau<1$ en este caso intermedio, donde el estado de crecimiento de la economía se maximiza

$$\frac{\partial\gamma_k}{\partial\tau^*} = 0$$

$$\frac{\partial\gamma_k}{\partial\tau^*} = 0.35x(25)^{1/3}x\frac{1}{4}x\tau^{-3/4} - \frac{5}{4}0.35x(25)^{15/4}x\tau^{1/4}$$

$$\frac{\partial\gamma_k}{\partial\tau^*} = 0.35x(25)^{5/4}x\tau^{1/4}\left[\frac{1}{4}x\frac{1}{\tau} - \frac{5}{4}\right] = 0$$

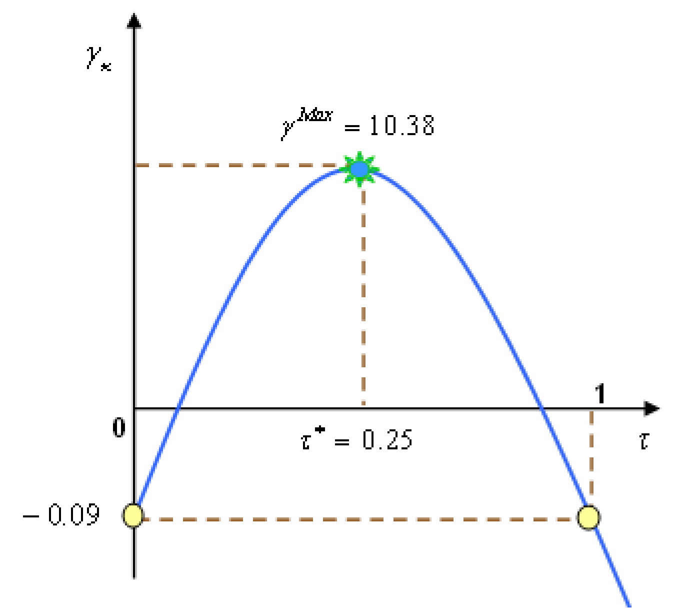
$$\left[\frac{1}{4}x\frac{1}{\tau}-\frac{5}{4}\right]=0 \quad \Rightarrow \quad \tau^{*}=0.20\approx 20\%$$

✓ De la tasa de crecimiento por trabajador tenemos

$$\gamma_{k}^{Máx}=0.35(1-0.20)25[25x0.2]^{1/4}-(0.09)$$

$$\gamma_{k}^{Máx}=10.38$$

**Gráfico del problema Nº2**




## 6.6 Modelo de crecimiento con gasto público

Veremos en este modelo que el gobierno debe financiar sus acciones en l a economía con impuestos distorsionados, y esto disminuye la rentabilidad de las inversiones de las empresas privadas.

### 6.6.1 Supuestos del modelo

A los supuestos del modelo con crecimiento con gobierno se le añaden los siguientes supuestos:

6) El gobierno decide el tamaño del gasto.
7) El gobierno puede afectar a la economía con la regulación (ley antimonopolio, derecho de propiedad, etc.).
8) Ele tamaño del gasto público esta en relación con el crecimiento de la economía.
9) La función de producción presenta rendimientos constantes a escala.
10) Solamente existe un impuesto y es sobre la renta.

La función de producción de la economía es la misma que el modelo anterior:

$$Y_t = AK_t^{\alpha} G_t^{1-\alpha} \ldots (FPA)$$

Dividiendo a la función de producción entre la cantidad de trabajadores de la economía

$$\frac{Y_t}{L_t} = A\frac{K_t^{\alpha} G_t^{1-\alpha}}{L_t} \Rightarrow y_t = A\frac{K_t^{\alpha}}{L_t^{\alpha}}\frac{G_t^{1-\alpha}}{L_t^{1-\alpha}} \quad \Longrightarrow \quad y_t = Ak_t^{\alpha} g_t^{1-\alpha} \ldots (FPI)$$

De la condición de equilibrio macroeconómico en una economía cerrada tenemos:

$$Y_t = C_t + I^b + G_t$$

De las identidades: $C_t = Pmgc.Yd$

$$Yd = Y_t - T = Y_t - \tau .Y_t$$

$$I^b = \dot{K}_t + \delta .K_t \Rightarrow \frac{I^b}{L_t} = \frac{\dot{K}_t}{L_t} + \delta k_t$$

$$\frac{\dot{K}_t}{L_t} = \dot{k}_t + nk_t$$

$$\frac{I^b}{L_t} = \dot{k}_t + (n+\delta)k_t$$

$$Pmgc + Pmgs = 1 \Rightarrow 1 - c = s$$

En el largo plazo existe un equilibrio fiscal (Por que no se permiten la existencia de déficit público).

$$G_t = T = \tau .Y_t$$

Reemplazando todas las identidades antes mencionadas en las líneas anteriores

$$Y_t = Pmgc.Yd + \dot{K}_t + \delta K_t + \tau .Y_t$$

$$Y_t = c.(1-\tau)Y_t + \dot{K}_t + \delta K_t + \tau .Y_t$$

$$Y_t = (1-c).(1-\tau) + \dot{K}_t + \delta K_t$$

Dividiendo la ecuación anterior entre la cantidad de trabajadores de la economía y reemplazando la identidad $1 - c = s$

$$\frac{Y_t}{L_t} = (1-c).(1-\tau) + \frac{\dot{K}_t}{L_t} + \delta \frac{K_t}{L_t}$$

$$y_t = s.(1-\tau) + \dot{k}_t + (\delta + n)k_t$$

Despejando $\dot{k}_t$ reemplazando la (FPI)

$$\dot{k}_t = s.(1-\tau)Ak_t^{\alpha} g_t^{1-\alpha} - (n+\delta)k_t$$, la ecuación de movimiento

Siguiendo con el análisis de *Barro* (1990), que incorpora a los bienes públicos como flujos productivos y no como bienes de capital acumulado.

Para este modelo tomaremos al gasto público como dado, y seguiremos suponiendo que el gobierno tiene que equilibrar su presupuesto en todos los momentos del tiempo y que los agentes de la economía maximizan su utilidad como se aprecia en la siguiente función de utilidad.

$$Máx: \quad J=\int_0^\infty\left[\frac{c_t^{1-\theta}-1}{1-\theta}\right].e^{-(\rho-n).t}dt$$

Donde la restricción será la ecuación fundamental del modelo anterior

$$\dot{k}_t = s.(1-\tau)Ak_t^\alpha g_t^{1-\alpha}-(n+\delta)k_t$$

Para solucionar este problema se debe cumplir que: $\rho > n$ es decir que la tasa de descuento tiene que ser mayor que la tasa de crecimiento de la población.

Como los agentes individualmente toman al gasto publico como dado, resuelve el problema de la maximización

**Planteamiento del problema**

$$Máx: \quad J=\int_0^\infty\left[\frac{c_t^{1-\theta}-1}{1-\theta}\right].e^{-(\rho-n).t}dt\ldots \text{(Función Objetivo)}$$

$$\dot{k}_t = s.(1-\tau)Ak_t^\alpha g_t^{1-\alpha}-(n+\delta)k_t\ldots \text{(Ecuación de movimiento)}$$

6) Comenzaremos a aplicar el método del *Hamiltoniano*.

$$H=\left[\frac{c_t^{1-\theta}-1}{1-\theta}\right].e^{-(\rho-n)t}+\lambda_t\left[s.(1-\tau)Ak_t^\alpha g_t^{1-\alpha}-(n+\delta)k_t\right]$$

Donde

$k_t$: Variable de estado.

$c_t$: Variable de control.

$\lambda_t$: Variable de coestado.

7) Tomando la derivada del hamiltoniano con respecto de la variable de control e imponiendo la condición igual a cero.

$$\frac{\partial H}{\partial c_t}=e^{-(\rho-n)t}.c_t^{-\theta}+\lambda_t(-1)=0 \quad \Rightarrow \quad e^{-(\rho-n)t}.c_t^{-\theta}=\lambda_t\ldots(I)$$

8) Tomando la derivada del Hamiltoniano con respecto a la variable de estado e imponiendo la condición del negativo de la derivada del multiplicado con respecto al tiempo.

$$\frac{\partial H}{\partial k_t}=-\dot{\lambda}_t \quad \Rightarrow \quad \lambda_t\left[[(1-\tau)]\alpha A\left(\frac{g_t}{k_t}\right)^{1-\alpha}-(n+\delta)\right]=-\dot{\lambda}_t$$

$$\left[[(1-\tau)]\alpha A\left(\frac{g_t}{k_t}\right)^{1-\alpha}-(n+\delta)\right]=-\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t}\ldots(II)$$

9) Tomando la derivada con respecto al multiplicador lagrangiano

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_t}=\dot{k}_t \quad \Rightarrow \quad s.(1-\tau)Ak_t^{\alpha}g_t^{1-\alpha}-(n+\delta)k_t=\dot{k}_t$$

$$\dot{k}_t=s.(1-\tau)Ak_t^{\alpha}g_t^{1-\alpha}-(n+\delta)k_t\ldots(III)$$

**Condición de Segundo Orden (CIIO)**

$$\underset{t\to\infty}{Lím}\,\lambda_t k_t=0$$

Esto quiere decir que $\lambda_t=0$ (el precio implícito de capital en el periodo final) o que $k_t=0$ (el stock de capital en el momento que muere).

**Condición de Transversalidad**

$$\underset{t\to\infty}{Lím}\,\lambda_t=\underbrace{\cancel{\frac{1}{e^{(\rho-n)\infty}}}}_{}\quad (1/\infty)\approx 0 \quad \Rightarrow \quad \underset{t\to\infty}{Lím}\,\lambda_t=0$$

Aplicando logaritmo neperiano a la ecuación (I) tenemos:

$$-\theta Lnc_t-(\rho-n)t=Ln\lambda_t$$

Multiplicando por -1 a la ecuación y tomando la derivada temporal a la ecuación anterior

$$(\rho-n)+\theta.\frac{\dot{c}_t}{c_t}=-\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t}\ldots(IV)$$

Igualando la ecuación (II) y (IV)

$$\left[[(1-\tau)\alpha]A\left(\frac{g_t}{k_t}\right)^{1-\alpha}-(n+\delta)\right]=-\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t}=(\rho-n)+\theta\frac{\dot{c}_t}{c_t}$$

Despejando $\frac{\dot{c}_t}{c_t}$ tenemos:

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t}=\frac{1}{\theta}\left[[(1-\tau)\alpha]A\alpha\left(\frac{g_t}{k_t}\right)^{1-\alpha}-(\rho+\delta)\right]\ldots(V)$$, la proposición de *Barro – Ramsey*

Esta ecuación nos dice que la tasa óptima del consumo por trabajador es la razón del producto marginal del capital menos la tasa de depreciación y la tasa de descuento intertemporal dividido sobre la elasticidad de la utilidad marginal con respecto al consumo por trabajador.

Del largo plazo, donde el gasto tiene que equilibrarse tenemos:

$$G_t = \tau . Y_t \Rightarrow \frac{G_t}{L_t} = \tau \frac{Y_t}{L_t} \quad \Longrightarrow \quad \tau = \frac{g_t}{y_t} = \frac{g_t}{Ak_t^{\alpha} g_t^{1-\alpha}} = \frac{(g_t / k_t)^{\alpha}}{A}$$

$$\frac{g_t}{k_t} = (\tau . A)^{1/\alpha} \ldots (\xi)$$

Reemplazando la ecuación ($\xi$) en la proposición de *Barro-Ramsey*

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{1}{\theta}\left[(1-\tau)A^{1/\alpha}\alpha(\tau)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - (\rho + \delta)\right]$$

$$\gamma_c = \frac{1}{\theta}\left[(1-\tau)A^{1/\alpha}\alpha(\tau)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - (\rho + \delta)\right] \ldots (\psi)$$

Podemos apreciar que los valores de esta ecuación están dados, por lo que la tasa es constante.

En el estado de crecimiento proporcionado la tasa de consumo es igual a la tasa de crecimiento del capital $\gamma_c^* = \gamma_k^* = \gamma^*$.

### 6.6.3 Tipología

Para analizar el tamaño del estado y de la tasa impositiva, debemos ver los casos cuando existe tributación, cuando no existen impuesto y el caso intermedio.

**Caso I:** $\tau = 0$ (cuando la tasa marginal de tributación es nula)

Si reemplazamos $\tau = 0$ en la ecuación ($\psi$) que representa la tas de crecimiento de la economía se tendrá una tasa de crecimiento negativa y con esto el estado no puede proporcionad bienes públicos.

Si $\tau = 0$ entonces $\gamma_k = \frac{1}{\theta}\left[(1-0)A^{1/\alpha}\alpha(0)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - (\rho + \delta)\right]$

La tasa de crecimiento por trabajador será negativa

$$\gamma_k = \frac{1}{\theta}\left[-(\rho + \delta)\right] \ldots (\psi)$$

**Caso II:** $\tau = 1$ (cuando la tasa marginal de tributación es del cien por ciento)

Cuando el estado se lleva todas las ganancias las empresas no se ven incentivadas a producir y con esto se obtiene nuevamente una tasa de crecimiento negativa.

Si $\tau = 1$ entonces $\gamma_k = \frac{1}{\theta}\left[(1-1)A^{1/\alpha}\alpha(1)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - (\rho + \delta)\right] \ldots (\psi)$

Esto implica que se obtendrá una tasa de crecimiento de capital por trabajador negativa.

$$\gamma_k = -\frac{(\rho + \delta)}{\theta}$$

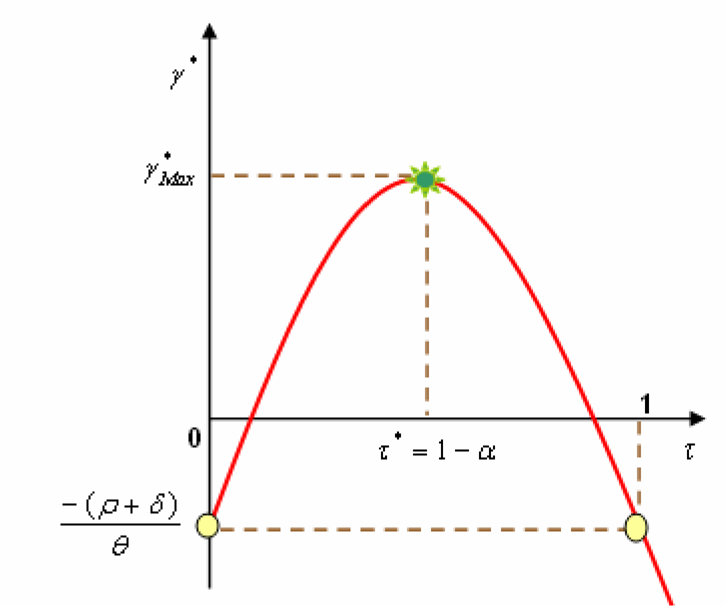
**Caso III:** $0 < \tau < 1$ (caso intermedio)

En este caso intermedio el estado va obtener ingresos fiscales y a su vez las empresas s e van a sentir incentivadas a producir. De otro lado dicha tasa de tributación $\tau$ , se puede financiar dicho gasto público.

Si $0 < \tau < 1$ entonces $\gamma_k = \frac{1}{\theta}\left[(1-\tau)A^{1/\alpha}\alpha(\tau)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - (\rho + \delta)\right]$

Para ver los casos mencionados anteriormente y la tasa de tributación que maximiza la tasa de crecimiento de la economía, para esto se puede apreciar en la grafica [6.24], donde la curva tiene forma de U invertida.

**Gráfico [6.24]: Relación entre $\tau$ y tasa de crecimiento**




Para maximizar la función se puede hallar igualando a cero la derivada de la tasa de crecimiento con respecto a $\tau$ .

$$\frac{\partial \gamma_k}{\partial \tau} = 0$$

$$\partial\frac{\gamma_k}{\partial\tau} = sA^{\frac{1}{\alpha}}\left[\frac{1-\alpha}{\alpha}\right].\tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}-1} - \frac{s.A^{1/\alpha}}{\alpha}.\tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$$

$$\partial\frac{\gamma_k}{\partial\tau} = \underbrace{sA^{\frac{1}{\alpha}}\tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}_{>0}\underbrace{\left[\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\alpha}\right]}_{=0} = 0$$

$$\left[\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{1}{\tau^*} - \frac{1}{\alpha}\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau^* = 1-\alpha$$

Por lo que el tipo impositivo que maximiza la tasa de crecimiento de la economía es $\tau^* = 1-\alpha$.

Para la tasa de impuesto que resulta si el gobierno escoge $\tau^* = 1-\alpha$, entonces la tasa de crecimiento sería.

$$\gamma_{Max}* = \frac{1}{\theta}\left[\alpha^2 A^{1/\alpha}(1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - (\rho+\delta)\right]$$

## 6.7 Modelo Neoclásico con capital Humano

El capital humano es definido como el stock de conocimientos que es valorizado económicamente e incorporado por los individuos (calificación, estado de salud, higiene...). Esta idea de la acumulación de capital humano fue puesta en valor en 1988 por *Lucas*, que desarrollo en su modelo el capital humano voluntario que corresponde a una acumulación de conocimientos (*schooling)* y la acumulación involuntaria (*learning by doing*).

Al mejorar su nivel de educación y de formación cada persona aumenta el stock de capital humano de una nación y de allí contribuye al mejoramiento de la productividad de la economía nacional, es decir, la productividad privada del capital humano tiene un efecto externo positivo.[45]

Veamos ahora que nos dice Schultz, T. (1961), "Investment in human capital". La inversión en capital humano constituye uno de los principales elementos explicativos del crecimiento económico, siendo responsable en buena medida de la divergencia apreciada entre el crecimiento del producto y el de la cantidad de factores productivos utilizados, al originar una mejora cualitativa del factor trabajo que aumenta su capacidad productiva y genera crecimiento económico. Abundando en esta idea, la inversión en capital humano fue rápidamente incorporada.[46]

### 6.7.1 Supuestos del modelo

Sea una economía capitalista sin relación con el exterior.

Dicha economía tiene dos sectores:

Un sector de producción de bien final, representado con el subíndice "t".

Un sector educación, representado con el subíndice "E".[47]

Los mercados de bienes y factores son de competencia perfecta.

La fuerza de trabajo crece a una tasa constante y exógena: $n$

Existen dos tipos de capital.

El stock de capital físico se deprecia a una tasa constante: $\delta_K$

El stock de capital humano se deprecia a una tasa constante: $\delta_H$[48]

---

[45] Es la definición de capital humano a sido extraído de *Gerald Destinobles, A.*: (2007) Introducción a los modelos de crecimiento económico exógeno y endógeno. Edición electrónica gratuita. Texto completo en www.eumed.net/libros/2007a/243/

[46] *Schultz, T. (1961), "Investment in human capital)* , American Economic Review, 51, Pag.:1-17

[47] Ha medida que un país se desarrolla, el estado general de salud y educación de su población mejora. Esto es un síntoma de bienestar social, en si mismo, pero también por ello la economía se hace mas productiva.

[48] Esta depreciación del capital humano se interpreta, como la imposibilidad que los padres transmitan todo su capital humano a sus hijos, antes que los padres fenezcan.

El ahorro se destina para la inversión del sector de producción del bien final.

Toda la población trabaja.

La economía produce un bien final.

**Sector de producción del bien final**

En este sector se considera que la tecnología utilizada por el bien final es distinta a la tecnología para la obtención del capital humano y físico. Su función de este sector se encuentra representada de la siguiente manera:

$$Y_t = K_t^{\alpha} H_t^{\beta} (BL_t)^{1-\alpha-\beta}$$

Donde

$Y_t$: Producto del sector de bien final en el instante "*t*".

$K_t$: Stock de capital físico destinado al sector de bien final en el instante "*t*".

$L_t$: Fuerza de trabajo destinada al sector de bien final en el instante "*t*".

$H_t$: Stock de capital humano destinado al sector de bien final en el instante "*t*".

$BL_t$: Fuerza de trabajo eficaz destinada al sector de bien final.

$\alpha$ : Elasticidad producto respecto al capital físico.

$\beta$ : Elasticidad producto respecto al capital humano.

$B$: Índice de nivel de tecnología del sector de bien final.

El ahorro destinado a la acumulación de capital físico en el sector de producción del bien final, es una proporción $s_K$ , del producto del bien final.

$$S_K = s_K.Y_t \qquad s.a: \quad 0 < s_K < 1$$

**Función de Producción intensiva**

Para hallar esta función de producción intensiva debemos de dividir a la función de producción del bien final, entre la cantidad de trabajo eficaz: $BL_t$

$$\frac{Y_t}{BL_t} = K_t^{\alpha} H_t^{\beta} \frac{(BL_t)^{1-\alpha-\beta}}{BL_t} \quad \Rightarrow \quad \frac{Y_t}{BL_t} = \frac{K_t^{\alpha} H_t^{\beta}}{(BL_t)^{\alpha+\beta}}$$

$$\frac{Y_t}{BL_t} = \frac{K_t^{\alpha}}{(BL_t)^{\alpha}} \frac{H_t^{\beta}}{(BL_t)^{\beta}} \quad \Rightarrow \quad \frac{Y_t}{BL_t} = \left[\frac{K_t}{BL_t}\right]^{\alpha} \left[\frac{H_t}{BL_t}\right]^{\beta}$$

$$\frac{y_t}{BL_t} = \left[\frac{k_t}{BL_t}\right]^{\alpha} \left[\frac{h_t}{BL_t}\right]^{\beta} \quad \Rightarrow \quad \bar{y}_t = \bar{k}_t^{\alpha} k \bar{h}_t^{\beta} \ldots (FPI)$$

La ecuación que se encuentra en el recuadro es la función de producción intensiva del sector del bien final.

Sea

$\frac{y_t}{B} = \bar{y}_t$ : Producto por trabajador eficaz.

$\frac{k_t}{B} = \bar{k}_t$ : Capital físico por trabajador eficaz.

$\frac{h_t}{B} = \bar{h}_t$ : Capital humano por trabajador eficaz.

Nota: Las barra de las variables denotan que son variables en unidades de eficiencia.

## Sector educación

Este sector de producción se encuentra representado por la siguiente función:

$$Y_E = K_E^{\alpha} H_E^{\beta} (BL_E)^{1-\alpha-\beta}$$

Donde

$Y_E$ : Producto del sector educacional.

$K_E$ : Stock de capital físico destinado al sector educacional.

$L_E$ : Fuerza de trabajo destinada al sector educacional.

$H_E$ : Stock de capital humano destinado al sector educacional.

$BL_E$ : Fuerza de trabajo eficaz destinada al sector educacional.

$\alpha$ : Elasticidad producto respecto al capital físico.

$\beta$ : Elasticidad producto respecto al capital humano.

$B$ : Índice de nivel de tecnología del sector educacional.

El ahorro destina a la acumulación de capital humano en el sector educacional, es una proporción $s_H$ , del producto del bien final.

$S_H = s_H . Y_t \qquad s.a: \quad 0 < s_H < 1$

## Función de Producción intensiva

Para hallar esta función de producción intensiva debemos de dividir a la función de producción del sector educacional, entre la cantidad de trabajo eficaz: $BL_t$

$$\frac{Y_{Et}}{BL_E} = K_E^{\alpha} H_E^{\beta} \frac{(BL_E)^{1-\alpha-\beta}}{BL_E} \quad \Rightarrow \quad \frac{Y_E}{BL_E} = \frac{K_E^{\alpha} H_E^{\beta}}{(BL_E)^{\alpha+\beta}}$$

$$\frac{Y_E}{BL_E} = \frac{K_E^{\alpha}}{(BL_E)^{\alpha}} \frac{H_E^{\beta}}{(BL_E)^{\beta}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{Y_E}{BL_E} = \left[\frac{K_E}{BL_E}\right]^{\alpha}\left[\frac{H_E}{BL_E}\right]^{\beta}$$

$$\frac{y_E}{BL_E} = \left[\frac{k_E}{BL_E}\right]^{\alpha}\left[\frac{h_E}{BL_E}\right]^{\beta} \quad \Longrightarrow \quad \bar{y}_t = \bar{k}_t^{\alpha} k \bar{h}_t^{\beta} \ldots (FPI)$$

La ecuación que se encuentra en el recuadro es la función de producción intensiva del sector del bien final.

Sea

$\frac{y_E}{B} = \bar{y}_E$ : Producto por trabajador eficaz en el sector educacional.

$\frac{k_E}{B} = \bar{k}_E$ : Capital físico por trabajador eficaz en el sector educacional.

$\frac{h_E}{B} = \bar{h}_E$ : Capital humano por trabajador eficaz en el sector educacional.

### 6.7.2 Ecuación dinámica del sector de producción del bien final

De la ecuación fundamental de *Solow – Swan* con progreso tecnológico tenemos:

$$\dot{\bar{k}}_t = sf(\bar{k}_t) - (n + m_L + \delta)\bar{k}_t$$

Se tiene $\bar{y}_t = f(\bar{k}_t) = \bar{k}_t^{\alpha} \bar{h}_t^{\beta} \ldots (FPI)$ $\qquad 0 < s_K < 1$

$$\dot{\bar{k}}_t = s_K . \bar{k}_t^{\alpha} \bar{h}_t^{\beta} - (n + m_L + \delta_K)\bar{k}_t$$

Es una ecuación del proceso de acumulación del capital físico en el sector de producción de bienes finales.

### 6.7.3 Equilibrio dinámico en el sector de producción de bienes finales

En el crecimiento promocionado se llega cuando $\gamma_{\bar{k}} = 0$

Si la tasa de crecimiento es nula $\frac{1}{\bar{k}_t}\frac{\partial \bar{k}_t}{\partial t} = 0$ , entonces $\frac{s_K . \bar{k}_t^{\alpha} \bar{h}_t^{\beta}}{\bar{k}_t} = (n + m_L + \delta_K)$ se determina el capital por trabajador eficaz ($\bar{k}_t^*$)

$$\frac{s_K \bar{h}_t^{\beta}}{n + m_L + \delta_K} = \frac{\bar{k}_t}{\bar{k}_t^{\alpha}} \quad \Longrightarrow \quad \bar{k}_t^* = \left[\frac{s_K \bar{h}_t^{\beta}}{n + m_L + \delta_K}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

### 6.7.3 Ecuación dinámica del sector educación

De la ecuación fundamental de *Solow – Swan* con progreso tecnológico tenemos:

$$\dot{\bar{h}}_t = sf(\bar{h}_t) - (n + m_L + \delta)\bar{h}_t$$

Se tiene $\bar{y}_t = f(\bar{k}_E) = \bar{k}_E^{\alpha}\bar{h}_E^{\beta} \ldots (FPI)$ $\qquad 0 < s_H < 1$

$$\dot{\bar{h}}_E = s_K.\bar{k}_E^{\alpha}\bar{h}_E^{\beta} - (n + m_L + \delta_H)\bar{h}_E$$

Es una ecuación del proceso de acumulación del capital humano en el sector educacional.

**Equilibrio dinámico en el sector educacional**

En el crecimiento promocionado se llega cuando $\gamma_{\bar{h}} = 0$

Si la tasa de crecimiento es nula $\frac{1}{\bar{h}_t}\frac{\partial \bar{h}_t}{\partial t} = 0$, entonces $\frac{s_K.\bar{k}_t^{\alpha}\bar{h}_t^{\beta}}{\bar{h}_t} = (n + m_L + \delta_H)$ se determina el capital humano por trabajador eficaz ($\bar{h}_t^*$)

$$\frac{s_K\bar{h}_t^{\beta}}{n + m_L + \delta_H} = \frac{\bar{h}_t}{\bar{h}_t^{\beta}} \quad \Rightarrow \quad \bar{k}_t^* = \left[\frac{s_K\bar{k}_t^{\alpha}}{n + m_L + \delta_H}\right]^{\frac{1}{1-\beta}}$$

**Diagrama de fases**

Para analizar el diagrama de fases adecuadamente plantearemos, el sistema de ecuaciones diferenciales:

1$^{er}$ Ecuación diferencial: $\dot{\bar{k}}_t = s_K.\bar{k}_t^{\alpha}\bar{h}_t^{\beta} - (n + m_L + \delta_K)\bar{k}_t$

2$^{da}$ Ecuación diferencial: $\dot{\bar{h}}_t = s_K.\bar{k}_t^{\alpha}\bar{h}_t^{\beta} - (n + m_L + \delta_H)\bar{h}_t$

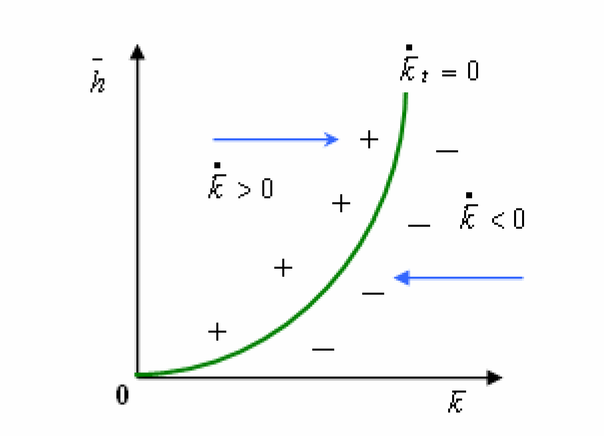
**Encontrando la curva $\dot{\bar{k}}_t$**

De la primera ecuación diferencial

Si $\dot{\bar{k}}_t = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = s_K.\bar{k}_t^{\alpha}\bar{h}_t^{\beta} - (n + m_L + \delta_K)\bar{k}_t$

Entonces: $s_K.\bar{k}_t^{\alpha}\bar{h}_t^{\beta} = (n + m_L + \delta_K)\bar{k}_t$

**Gráfico [6.25]: Comportamiento de $\dot{\bar{k}} = 0$**




Si nos situamos por encima de la curva $\dot{\bar{k}}_t = 0$, vemos que un pequeño movimiento de $\bar{h}_t$ irá asociado a un crecimiento de $\dot{\bar{k}}_t > 0$: De la primera ecuación diferencial, tenemos que la derivada de $\dot{\bar{k}}_t$, con respecto a $\bar{h}_t$ nos da el sentido de las flechas como veremos a continuación:

$$\frac{\partial \dot{\bar{k}}_t}{\partial \bar{h}_t} = \beta . s_K \bar{k}_t^{\alpha} \bar{h}_t^{\beta-1} > 0$$

Esta derivada nos quiere decir que a medida que aumenta el capital humano la secuencia de signos es creciente: $\{-,0,+\}$ entonces concluimos por encima de la curva $\dot{\bar{k}}_t = 0$, entonces el capital crece $\dot{\bar{k}}_t > 0$, como se puede visualizar en el gráfico [6.25], que se muestra en la parte superior de la página. Denotamos el movimiento de flecha hacia la derecha, por que el eje horizontal aparece $\bar{k}_t$ y también por que a medida que nos ubiquemos más a la derecha el capital físico por trabajador crecerá.

De la misma manera analizaremos que pasa si ubicamos un vector por debajo de la curva $\dot{\bar{k}}_t = 0$, las flechas apuntan así la izquierda, diciéndonos que por debajo de la curva $\dot{\bar{k}}_t = 0$ el capital decrece $\dot{\bar{k}}_t < 0$, en este caso las flechas apuntaran hacia la izquierda, denotando que el capital a medida que se acerca al origen decrece.

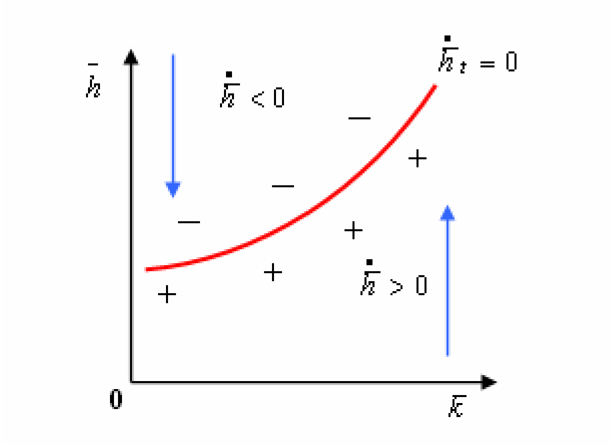
### Encontrando la curva $\dot{\bar{h}}_t$

De la segunda ecuación diferencial

Si $\dot{\bar{h}}_t = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = s_H . \bar{k}_t^{\alpha} \bar{h}_t^{\beta} - (n + m_L + \delta_H) \bar{h}_t$

Entonces: $s_H . \bar{k}_t^{\alpha} \bar{h}_t^{\beta} = (n + m_L + \delta_K) \bar{h}_t$

**Gráfico [6.26]: Comportamiento de** $\dot{\bar{h}} = 0$




Si nos situamos por debajo de la curva $\dot{\bar{h}}_t = 0$, vemos que un pequeño movimiento de $\bar{k}_t$ irá asociado a un crecimiento de $\dot{\bar{h}}_t = 0$. De la segunda ecuación diferencial tenemos que la derivada de $\dot{\bar{h}}_t$ con respecto a $\bar{k}_t$ nos da el sentido de las flechas como veremos a continuación.

$$\frac{\partial \dot{\bar{h}}_t}{\partial \bar{k}_t} = \alpha . s_K \bar{k}_t^{\alpha-1} \bar{h}_t^{\beta} > 0$$

Esta derivada nos quiere decir que a medida que aumenta el capital físico por trabajador la secuencia de signos es creciente: $\{-,0,+\}$ entonces concluimos por encima de la curva, $\dot{\bar{h}}_t = 0$ entonces el capital humano crece $\dot{\bar{h}}_t > 0$, como se puede visualizar en el gráfico [6.26], que se muestra. Denotamos el movimiento de flecha hacia arriba, por que el eje vertical aparece $\bar{h}_t$ y también por que a medida que nos ubiquemos más arriba el capital humano crecerá.

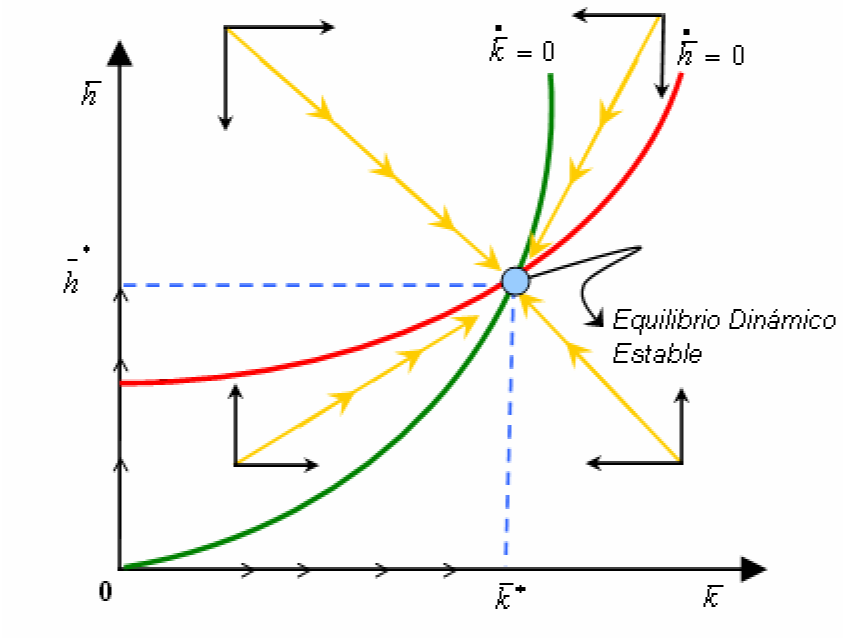
De la misma manera analizaremos que pasa si ubicamos un vector por encima de la curva $\dot{\bar{h}}_t = 0$, las flechas apuntan hacia abajo, diciéndonos que por debajo de la curva $\dot{\bar{h}}_t = 0$ el capital humano decrece $\dot{\bar{h}}_t < 0$, en este caso las flechas apuntaran hacia abajo, denotando que el capital humano a medida que se acerca al origen decrece.

## Análisis cuantitativo

Después de haber unido los dos gráficos anteriores, veremos que la grafico que se forma al juntar estos grafico tiene la siguiente forma, como se puede apreciar en la grafico [6.27], donde lo primero que se puede apreciar, que el modelo converge en todos los p untos a un solo estado de crecimiento proporcionado, donde este equilibrio dinámico es estable en el tiempo.

Por lo que el modelo en el largo plazo presenta un equilibrio aerodinámico estable, donde todas las líneas convergen hacia un punto de equilibrio.

**Gráfico [6.27]: Equilibrio del Modelo de Crecimiento con Capital Humano**




## *6.8 Modelo de crecimiento con educación (Jones)*

*Charles Jones* (1990) formula un modelo de crecimiento modelo de crecimiento en países donde la frontera tecnológica esta lejos y se debe producir una transferencia para acortar la distancia y en el que considera la educación, como un elemento importante en el análisis del crecimiento económico. *Jones* va elaborar este modelo de crecimiento desde un enfoque neoclásico, haciendo una extensión del modelo de *Solow.*

En este modelo de crecimiento endógeno aparece como el resultado de que los individuos aprenden a usar los bienes de capital mas avanzados en la frontera tecnológica. Esta idea tiene que ver que los individuos mas calificados asimilaran más rápido los avances de la ciencia y la tecnología, lo cual contribuye al desarrollo del país, de lo que se deriva la importancia del conocimiento vinculado a nivel de creatividad y a desarrollo tecnológico en la definición de la política economica.

### 6.8.1 Supuestos del modelo

- Sea una economía capitalista sin sector público.
- Dicha economía no tiene relación con el exterior.
- La economía produce un solo bien.
- Coexisten dos tipos de capitales.
- Existen sustitución entre capital físico y capital humano.
- El capital humano aumenta a través de las capacitaciones y de la educación.
- Los individuos de esta economía acumulan capital humano al dedicar un tiempo al aprendizaje de nuevas habilidades en lugar de trabajar.
- $u$ : Representa el tiempo que las personas dedican a la producción.
- $(1-u)$ : Representa la parte del tiempo que una persona dedica a aprender habilidades.

**Análisis**

$H_t = e^{\psi(1-u)} L_t \ldots (I)$ $\psi > 0$**:** Es una constante positiva

Esta ecuación representa las habilidades de aprendizaje de la mano de obra calificada y nos dice además que el capital humano se desarrolla a través de la educación. El desarrollo del aprendizaje de nuevas habilidades se logra destinando un tiempo, $(1-u)$ a la educación.

Si $u = 0$ entonces $(1-u) = 1$, se desarrolla el capital humano como se expresa al reemplazar el valor en la ecuación (I).

$$H_t = e^{\psi(1-0)} L_t \Rightarrow H_t = e^{\psi} L_t$$

Si por el contrario $u = 1$ entonces $(1-u) = 0$, no habrá capital humano sino trabajo no calificado, reemplazar el valor en la ecuación (I).

$$H_t = e^{\psi(1-1)} L_t \Rightarrow H_t = L_t$$

Si aplicamos logaritmo a la ecuación (I) tenemos:
$Ln(H_t) = \psi(1-u) + Ln(L_t)$

Derivando la ecuación anterior respecto a $(1-u)$ obtenemos:

$$\frac{\partial Ln(H_t)}{\partial(1-u)} = \psi > 0$$

Esto nos expresa, que una aumento pequeño de $(1-u)$, aumenta $H_t$ por el porcentaje $\psi$ .

Ahora dividiendo la ecuación (I) entre la cantidad de trabajadores

$$\frac{H_t}{L_t} = e^{\psi(1-u)} \quad \Longrightarrow \quad h_t = e^{\psi(1-u)}$$

Esta ecuación expresa que el capital humano depende del tiempo.

**Función de producción agregada**

*Jones* de manera similar a *Romer* parte del hecho de que el país produce un articulo $Y_t$, usando trabajo $L_t$, capital $K_t$ y utiliza bienes de capital y añade que el uso de estos bienes de capital esta limitado por el nivel de calificación de la fuerza laboral $n$.

*Jones* considera que cualquier bien intermedio de capital se puede producir con una unidad bruta de bienes de capital. Formula una *Cobb - Douglas* común $Y_t = K_t^{\alpha}\left[BH_t\right]^{\beta}$ , en este caso asume la calificación $h_t$, como un supuesto acumulativo resultado del uso de tecnología.

$$Y_t = K_t^{\alpha}\left[BH_t\right]^{\beta} \ldots (FPA)$$
$$s.a: \quad \alpha + \beta = 1$$

Donde

$Y_t$: Producto agregado en el instante "*t*".

$K_t$: Stock de capital agregado en el instante "*t*".

$H_t$: Stock de capital humano en el instante "*t*".

$BH_t$: Stock de capital eficiente en el instante "*t*".

$\alpha$ : Elasticidad producto respecto al capital físico.

$\beta$ : Elasticidad producto respecto al capital humano.

$B$ : Factor aumentativo de la eficiencia del trabajo.

Para hallar la producción agregada en términos per cápita vamos a dividir la (FPA) entre el capital humano eficiente.

$$\frac{Y_t}{BH_t} = K_t^{\alpha}\left[\frac{BH_t}{BH_t}\right]^{\beta-1} \Rightarrow \frac{Y_t}{BH_t} = \frac{K_t^{\alpha}}{(BH_t)^{1-\beta=\alpha}} \Rightarrow \frac{Y_t}{BH_t} = \left[\frac{K_t}{BH_t}\right]^{\alpha}$$

$$\tilde{y}_t = \tilde{k}_t^{\alpha} \ldots (FPI)$$

Donde

$\frac{Y_t}{BH_t} = \tilde{y}_t$ : Representa el producto por unidad de capital eficiente.

$$\frac{Y_t / L_t}{BH_t / L_t} = \frac{y_t}{Bh_t} = \frac{\bar{y}_t}{h_t} = \tilde{y}_t$$

$\frac{K_t}{BH_t} = \tilde{k}_t$ : Representa el capital físico por unidad de capital humano eficiente.

$$\frac{K_t / L_t}{BH_t / L_t} = \frac{k_t}{Bh_t} = \frac{\bar{k}_t}{h_t} = \tilde{k}_t .$$

Nota: El superíndice "~"denota la variable por unidad de capital humano eficiente

**Ecuación fundamental**

De la ecuación fundamental de *Solow – Swan* con progreso tecnológico

$$\frac{\partial \tilde{k}_t}{\partial t} = sf(\tilde{k}_t) - (n + m_L + \delta)\tilde{k}_t$$

Se tiene: $\tilde{y}_t = \tilde{k}_t^{\alpha}$

$$\frac{\partial \tilde{k}_t}{\partial t} = s\tilde{k}_t^{\alpha} - (n + m_L + \delta)\tilde{k}_t$$ , la ecuación fundamental de *Jones*

Es una ecuación dinámica del proceso de acumulación de capital físico y humano en una economía capitalista.

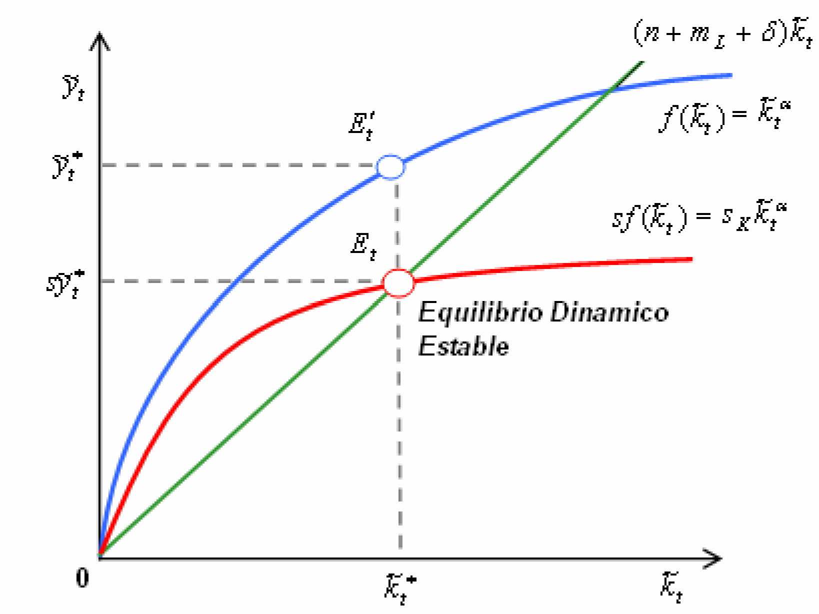
## Crecimiento proporcionado

El crecimiento proporcionado en un estado dinámico se alcanza cuando $\frac{\partial \tilde{k}_t}{\partial t}$, es nulo.

Si $\frac{\partial \tilde{k}_t}{\partial t} = 0$ entonces $s\tilde{k}_t^{\alpha} = (n + m_L + \delta)\tilde{k}_t$, se determina el capital físico por unidad de capital humano eficiente ($\tilde{k}_t^*$) como se aprecia en el gráfico [6.28] donde el equilibrio se encuentra en el punto $E_t$, donde $s\tilde{k}_t^{\alpha} = (n + m_L + \delta)\tilde{k}_t$.

$$\tilde{k}_t^* = \left[\frac{s}{n + m_L + \delta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

**Gráfico [6.28]: El diagrama de *Jones* y la función de producción**




Al sustituir $\tilde{k}_t^*$ en la función de producción intensiva (FPI) se encuentra el valor de estado proporcional del producto por unidad de capital eficiente, también como se aprecia en la grafico [6.28].

$$\tilde{y}_t^* = \left[\frac{s}{n + m_L + \delta}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

## Versión de *Barro*

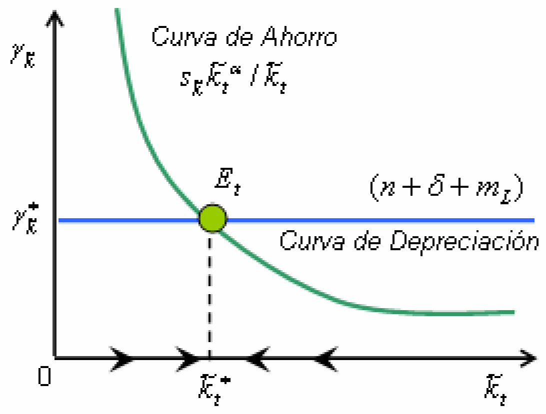
Dividiendo la ecuación fundamental de *Jones* entre $\tilde{k}_t$

$$\frac{1}{\tilde{k}_t}\frac{\partial \tilde{k}_t}{\partial t} = s\frac{\tilde{k}_t^{\alpha}}{\tilde{k}_t} - (n + m_L + \delta)$$

$$\gamma_{\tilde{k}} = s\frac{\tilde{k}_t^{\alpha}}{\tilde{k}_t} - (n + m_L + \delta)$$

Si $\gamma_{\tilde{k}} = 0$ entonces la curva de ahorro y depreciación se cortan en el punto donde: $s\frac{\tilde{k}_t^{\alpha}}{\tilde{k}_t} = (n + m_L + \delta)$ determina el equilibrio dinámico del modelo en el punto $E_t$, como se aprecia en el gráfico [6.30] donde se aprecia que la tasa de crecimiento converge a un punto en el largo plazo.

**Gráfico [6.29]: Dinámica de transmisión**




## Problema

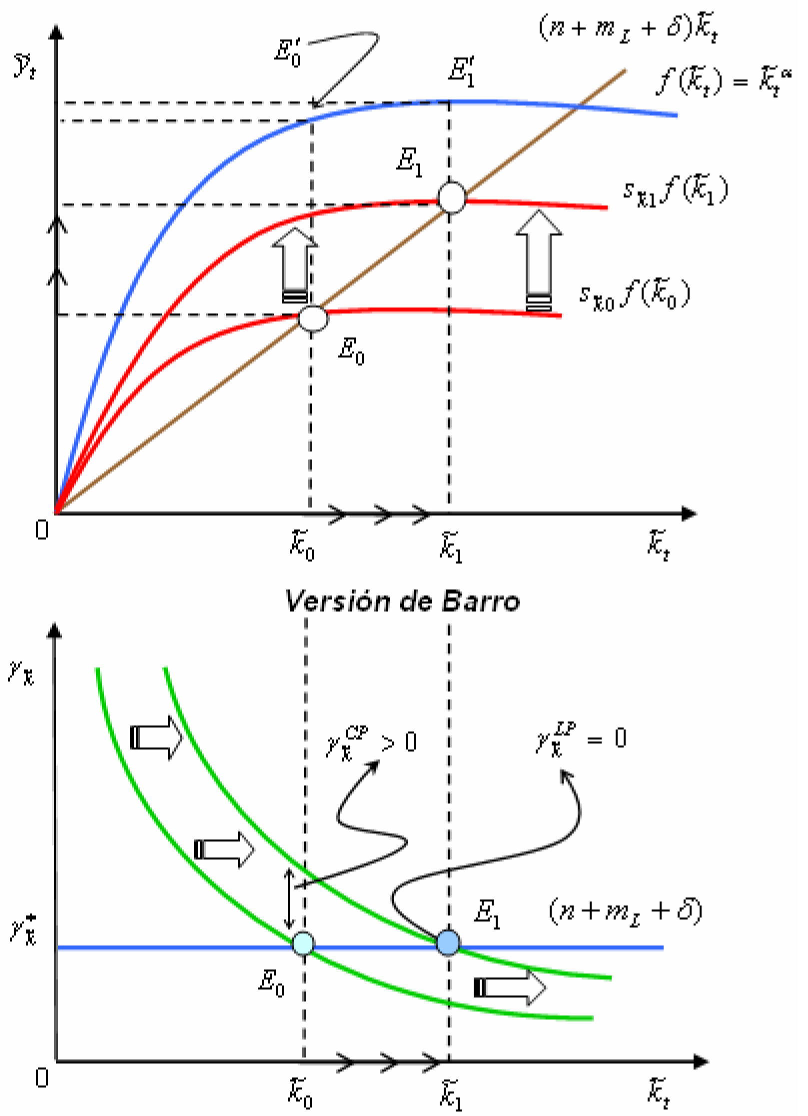
Analicemos el impacto de un aumento permanente de la tasa de ahorro que se destina al sector de producción de bien final.

**Rpt:**

El aumento de la tasa de ahorro desplaza en forma ascendente la curva $s_{\tilde{k}0}\tilde{k}_t^{\alpha}$ a $s_{\tilde{k}1}\tilde{k}_t^{\alpha}$ , como se puede apreciar en la gráfico [6.30], por lo que la inversión por trabajador eficiente excede a la cantidad necesaria para mantener constante el capital físico por unidad de capital humano eficientes, por consiguiente la economía comenzara una profundización del capital físico por unidad de capital humano eficiente.

Esta profundización continuara hasta llegar al punto $E_t$ donde $s_{\tilde{k}1}\tilde{k}_t^{\alpha} = (n + m_L + \delta)\tilde{k}_t$ y la existencia de capital físico por unidad de capital humano eficiente llega a un valor más alto que es $\tilde{k}_1$. Por lo que la economía se encuentra ahora con mayor capital y por ende un mayor per capita por trabajador eficiente.

**Gráfico [6.30]: Aumento permanente de la tasa de ahorro**




En la versión de *Barro*, que se puede apreciar en la parte inferior de la grafico [6.30] donde el aumento de la tasa de ahorro, eleva a la economía a obtener una mayor tasa de crecimiento en el corto plazo positiva $\gamma_{\tilde{k}}^{CP} > 0$ esto ocurre hasta que la economía llegue al estado de crecimiento proporcionado, donde su tasa de crecimiento de largo plazo es constante y nula $\gamma_{\tilde{k}}^{LP} = 0$, donde el nuevo proporcionado es el punto $E_1$, como se puede apreciar en la parte inferior de la grafico [6.30], de esta manera esta economía pasa a tener un mayor $\tilde{k}_t^*$.

## *6.9 Modelo de crecimiento con educación (Uzawa)*

Este es un modelo pionero y antecedente al modelo de *Lucas*, plantea el rol de la educación como influye en el crecimiento. En *Uzawa* (1965) se presentan las ideas básicas que permiten introducir el capital humano como potenciador del capital y como factor de su propia reproducción y crecimiento

### 6.9.1 Supuestos del modelo

- ✓ Sea una economía capitalista que tiene dos sectores:
  - o Un sector de producción del bien final.
  - o En sector educacional.
- ✓ Sea el ahorro para la acumulación de capital físico es una proporción del ingreso nacional.
- ✓ La economía no tiene relación con el exterior.
- ✓ La fuerza de trabajo crece a una tasa constante: $n$
- ✓ La función de producción es neoclásica.
- ✓ Sea $u$, una fracción de la fuerza de trabajo que se destina al trabajo productivo ($L_p$), donde: $u = \frac{L_p}{L}$
- ✓ Sea $(1-u)$, una fracción de la fuerza de trabajo que se destina al trabajo educacional: $(1-u) = \frac{L_E}{L}$
- ✓ Se tiene dos tipos de trabajo:
  - o Trabajo productivo $L_p$, es aquel trabajo que se destina a la producción del bien final.
  - o Trabajo educacional $L_E$, es aquel trabajo que se destina al sector educacional.
- ✓ La tasa del progreso tecnológico $m_L$, depende del trabajo educacional $m_L = \phi(1-u)$.

### 6.9.2 Sector de producción del bien final

La función de este sector esta representada por la siguiente ecuación:

$$Y_t = F(K_t, BL_p)\ldots \text{(Función de producción del bien final)}$$

Donde

$Y_t$: Producto del bien fina en el instante "*t*".

$K_t$: Stock de capital físico del sector del bien final en el instante "*t*".

$L_p$: Representa el trabajo productivo.

$BL_p$: Trabajo productivo eficiente en el instante "*t*".

Sabemos que $u = \frac{L_p}{L} \Rightarrow L_p = uL\ldots(I)$

Reemplazando la ecuación (I) en la función de producción del bien final.

$Y_t = F(K_t, B.uL_t)\ldots(II)$

$B$: Factor aumentativo de la eficiencia del trabajo con las propiedades:

Si $t = 0$ entonces $B(t = 0) = 1$

Si $t > 0$ entonces $B(t) > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \dot{B}(t) > 0$

**Función de producción intensiva del bien final**

$Y_t = F(K_t, BL_p)$

Pero se sabe que el tiempo dedicado para la producción es $L_p = uL$

Reemplazando el tiempo dedicado para la producir en la función de producción

$Y_t = F(K_t, uL_t)$

Sabemos que el trabajo productivo eficiente esta expresado como:

$$\frac{Y_t}{BuL_t} = F(\frac{K_t}{BuL_t}, 1) \Longrightarrow \frac{y_t}{Bu} = f(\frac{k_t}{Bu}, 1) \Longrightarrow \frac{\bar{y}_t}{u} = f(\frac{\bar{k}_t}{u}, 1)$$

$$\hat{y}_t = f(\hat{k}_t) \ldots \text{(FPI del trabajo productivo eficiente)}$$

Donde

$\hat{y}_t = \dfrac{Y_t}{BuL_t}$ : Producto por unidad de trabajo productivo eficiente.

$$\frac{Y_t}{BuL_t} = \frac{y_t}{Bu} = \frac{\bar{y}_t}{u} = \hat{y}_t$$

$\hat{k}_t = \dfrac{K_t}{BuL_t}$ : Capital por unidad de trabajo eficiente.

$$\frac{K_t}{BuL_t} = \frac{k_t}{Bu} = \frac{\bar{k}_t}{u} = \hat{k}_t$$

### 6.9.3 Sector educación

El profesor *Uzawa* nos dice que este sector presenta la siguiente función:

$$Y_E = BL_E \ldots \text{(FPA del sector educacional)}$$

Sabemos por el supuesto que: $(1-u) = \dfrac{L_E}{L} \Rightarrow L_E = (1-u)L \ldots (III)$

Reemplazando la ecuación (III) en la función de producción del sector educacional

$Y_E = B(1-u)L$

En el modelo de *Uzawa* el progreso tecnológico es endógeno

$m_L = \phi(1-u)$

$$m_L = \frac{\dot{B}}{B} = g_B \Longrightarrow m_L = \frac{\dot{B}}{B} = \phi(1-u)$$

Con el aumento de la fracción de trabajo que se destina a la educación, aumentara la educación y con ello se elevara la productividad de los trabajadores.

## Ecuación diferencial en el sector producción del bien final

De la ecuación fundamental de *Solow-Swan* con progreso tecnológico

$$\dot{\bar{k}}_t = sf(\bar{k}_t) - (n + m_L + \delta)\bar{k}_t$$

Se tiene que $\hat{y}_t = f(\hat{k}_t)$

Reemplazando la variable $\hat{k}_t$ en la ecuación y la tasa de depreciación del capital $\delta_K$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{K_t}{BuL_t}\right] = s_K f\left(\frac{K_t}{BuL_t}\right) - (n + m_L + \delta)\frac{K_t}{BuL_t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{k_t}{Bu}\right] = s_K f\left(\frac{k_t}{Bu}\right) - (n + m_L + \delta)\frac{k_t}{Bu}$$

$$\frac{\partial \hat{k}_t}{\partial t} = s_K f(\hat{k}_t) - (n + m_L + \delta)\hat{k}_t$$

## Función de producción intensiva del sector educacional

$$Y_E = BL_E$$

Pero se sabe que el tiempo dedicado para la educación es $L_E = (1-u)L_t$

Reemplazando el tiempo dedicado para producir en la función de producción

$$Y_E = B(1-u)L_t$$

Dividiendo a la función de producción entre el trabajo productivo eficiente tenemos:

$$\frac{Y_E}{BuL_t} = \frac{B(1-u)L_t}{BuL_t} \Rightarrow \frac{y_E}{Bu} = \frac{(1-u)}{u} \Rightarrow \frac{\bar{y}_E}{u} = \frac{1-u}{u}$$

$$\hat{y}_E = \left(\frac{1-u}{u}\right) \ldots \text{(FPI del sector educacional)}$$

Donde

$\hat{y}_E = \dfrac{Y_E}{BuL_t}$ : La razón del producto educacional respecto al trabajo productivo eficiente.

$\hat{k}_E = \dfrac{K_E}{BuL_t}$ : La razón del capital educacional respecto al trabajo productivo eficiente.

**Ecuación diferencial en el sector educación**

Como el progreso tecnológico es endógeno tenemos:

$$m_L = \frac{\dot{B}_t}{B_t} = \phi(1-u) \quad \Rightarrow \quad \dot{B}_t = B_t\phi(1-u)$$

## *6.10 Modelo de acumulación de capital humano (Lucas)*

En esta sección introduciremos el capital humano en un modelo de crecimiento como plantea *Lucas (1988),* y mostraremos que el crecimiento en forma sostenida del capital humano es suficiente para tener un crecimiento económico sostenido, como nos muestra *Lucas en "On the Mechanics of Development Planning"* (En las Mecánicas de Planificación de Desarrollo), por este y otros trabajo Lucas gano el *Premio Nobel de Economía en 1995.*

Este modelo desarrollo es el pilar sobre el que descansan las nuevas teorías del crecimiento y en especial la contribución del capital humano al crecimiento económico de acuerdo con las teorías del crecimiento endógeno, la capacidad productiva de los individuos aumenta con su educación, no solo por la incorporación de habilidades y capacidades para el trabajo, sino también por el impacto sobre la salud y alimentación, que incrementa la productividad laboral.[49]

En este modelo a diferencia del modelo AZ, desarrollado anteriormente, se diferencia por que no considera al capital humano y físico igual (bienes similares), ni que ambos eran producidos con la misma tecnología, sino considera el capital físico y el capital humano son bienes distintos y que son producidos con tecnología distinta.

En *Uzawa* (1965) y *Lucas* (1988) se presentan las ideas básicas que permiten introducir el capital humano como potenciador del capital y como factor de su propia reproducción y crecimiento.[50]

*Robert Lucas* nos dice que un individuo dedica muchos años de su vida a la escuela, con el fin de obtener capacidades que le permitan mejorar su capacidad productiva. La decisión de invertir en la educación se basa sobre una comparación entre los costos de la enseñanza (ingresos, gastos de escolaridad, pasajes, útiles, etc.) y las ventajas futuras de una escolaridad mas avanzada. Por lo que considerar la escolaridad como una decisión de inversión para aumentar el capital humano de una persona.

La doble característica del capital humano nos dice: De un lado, de ser de información del saber (como la tecnología) y del otro lado, de ser apropiable por los individuos (como el capital físico). Siendo del saber, es producido esencialmente consigo mismo, los alumnos son formados por los profesores y aquellos utilizan sus conocimientos presentes para adquirir nuevos conocimientos. Esto hace que el capital humano se aparenta al conocimiento técnico y las reglas de acumulación con rendimientos de escala dinámicas le pueden ser aplicadas, además genera un proceso de crecimiento endógeno.[51]

[49] Estas nota han sido desarrollado en base al articulo de *Robert Lucas (1988) "On the Mechanics of Development Planning"* (En las Mecánicas de Planificación de Desarrollo). Journal of Monetary Economics (El periódico de Economía Monetaria) , pp. 3-42.

[50] Por lo que el capital humano puede ser definido como la suma de las capacidades habiendo una eficiencia productiva incorporada a los individuos o a las colectividades. Esas capacidades pueden ser diversas: salud, fuerza física, conocimientos generales o técnicos

[51] Lucas privilegia al capital humano sobre la tecnología como factor de crecimiento, por que la tecnología es un bien publico accesible de manera idéntica a todas las naciones, además, no puede explicar las diferencias internacionales de nivel y de la tasa de crecimiento del ingreso

### 6.10.1 Supuestos del modelo

- ✓ Sea una economía capitalista que tiene dos sectores:
- ✓ Existen dos tipos de capital:
- ✓ El stock de capital físico se deprecia a una tasa constante y exógena: $\delta_K$
- ✓ El stock de capital humano se deprecia a una tasa constante y exógena: $\delta_H$
- ✓ Toda la población trabaja en esta economía.
- ✓ La fuerza de trabajo crece a una tasa constante y exógena. $n$
- ✓ La acumulación de capital físico ocurre como la detracción del consumo.
- ✓ La acumulación de capital físico ocurre como la detracción del consumo

### 6.10.2 Función de producción del bien final

Asume una función de producción *Cobb-Douglas*

$$Y_t = AK_t H_p^{\alpha 1-\alpha}$$

Donde

$Y_t$: Voluta de producción del sector del bien final en el instante "*t*".

$K_t$: Stock de capital físico que opera en el sector del bien final en el instante "*t*".

$H_p$: Stock de capital humano que opera en el sector del bien final.

$H_t$: Stock de capital humano en el instante "*t*".

$A$: Índice del nivel de tecnología en el sector de producción del bien final.

$\alpha$ : Elasticidad producto respecto al capital físico.

$1-\alpha$ : Elasticidad producto respecto al capital humano.

Sea

$u$ : Representa la fracción de capital humano que labora en el sector de producción del bien final.

$$u = \frac{H_p}{H_t} \Rightarrow H_p = uH_t \ldots (I)$$

Reemplazando la ecuación (I) en la función de producción del bien final, tenemos:

$$Y_t = AK_t^{\alpha}(uH_t)^{1-\alpha}$$

Para expresar esta función en términos per cápita y así halla la función de producción intensiva, pasa remos a dividir la función de producción de bien final entre el total de trabajadores ($L_t$) de a economía.

$$\frac{Y_t}{L_t} = \frac{AK_t^{\alpha} u^{1-\alpha} H_t^{1-\alpha}}{L_t}$$

Usando el artificio: $L_t = L_t^{\alpha}.L_t^{1-\alpha}$

$$\frac{Y_t}{L_t} = A\frac{K_t^{\alpha}}{L_t^{\alpha}}u^{1-\alpha}\frac{H_t^{1-\alpha}}{L_t} \Longrightarrow y_t = Ak_t^{\alpha}u^{1-\alpha}h_t^{1-\alpha} \ldots(FPI)$$

### Ecuación de acumulación de capital físico

De la condición de equilibrio macroeconómico

$Y_t = C_t + I^b$

$$Y_t = C_t + I_K^n + I_K^{rep} \quad \Rightarrow \quad Y_t = C_t + \dot{K}_t + \delta_K K_t$$

Resolviendo la ecuación para $\dot{K}_t$ y reemplazando en la función de producción

$$\dot{K}_t = AK_t^{\alpha}u^{1-\alpha}H_t^{1-\alpha} - C_t - \delta_K K_t$$

Esta ecuación de acumulación de capital físico neto, es el remanente del producto respecto al consumo y respecto a la inversión en reposición.

### Ecuación Diferencial del sector de producción del bien final

De la condición de equilibrio macroeconómico

$Y_t = C_t + I^b$

Dividiendo a la condición macroeconómica entre el total de trabajadores $L_t$ para hallar la ecuación en términos per cápita.

$$\frac{Y_t}{L_t} = \frac{C_t}{L_t} + \frac{I^b}{L_t} \Rightarrow y_t = c_t + \frac{\dot{K}_t}{L_t} + \delta k_t \Longrightarrow y_t = c_t + \dot{k}_t + (n+\delta)k_t$$

Resolviendo la ecuación para $\dot{k}_t$ y reemplazando la (FPI)

$$\dot{k}_t = Ak_t^{\alpha}u^{1-\alpha}h_t^{1-\alpha} - c_t - (n+\delta)k_t$$

### 6.10.3 Sector educacional

Asume por simplicidad que este sector no usa capital físico sino solo capital humano y formula la siguiente función de producción.

$$Y_E = BH_E$$

Donde

$Y_E$ : Volumen en el sector educacional.

$H_E$ : Stock de capital humano que opera en el sector educacional.

$B$ : Índice del nivel de tecnología en el sector educacional.

Sea

$(1-u)$ : La fracción de capital humano que labora en el sector educacional.

$$(1-u)=\frac{H_E}{H_t} \quad \Rightarrow \quad H_E=(1-u)H_t$$

El capital humano que opera en el sector educacional es una fracción que operar en el sector educacional, donde $H_E$ es una fracción $(1-u)$ de capital humano.

Reemplazando el stock de capital humano que opera en el sector educacional en la función del sector educacional tenemos:

$$Y_E=B(1-u)H_t$$

Para hallar la función de producción intensiva vamos a dividir entre la cantidad de trabajadores a la ecuación a la nueva función de producción obtenida tenemos:

$$\frac{Y_E}{L_t}=B(1-u)\frac{H_t}{L_{tt}} \quad \Rightarrow \quad y_E=B(1-u)H_t\ldots(FPI)$$

## Ecuación diferencial del sector educacional

De la condición de equilibrio macroeconómico

$Y_H=C_H+I_H^b$

Pero como sabemos que en capital no tiene consumo $C_H=0$, reemplazando obtenemos:

$$Y_H=I_H^b \Rightarrow BH_E=I_H^n+I_H^{rep} \quad \Rightarrow \quad B(1-u)H_t=\dot{H}_t+\delta_H H_t$$

Resolviendo para $\dot{H}_t$ obtenemos:

$$\dot{H}_t=B(1-u)H_t-\delta_H H_t$$

Esta ecuación del proceso de acumulación neta de capital humano y esto va indicar que la tasa de cambio de capital humano es igual al remanente del producto educacional respecto a la acumulación en reposición del capital humano.

## Sistema de Ecuaciones Diferenciales

De la condición macroeconómica tenemos:

$$Y_E=I_H^b \Rightarrow BH_E=I_H^n+I_H^{rep} \quad \Rightarrow \quad B(1-u)H_t=\dot{H}_t+\delta_H H_t$$

Dividiendo la ecuación anterior entre el numero de trabajadores

$$B(1-u)\frac{H_t}{L_t}=\frac{\dot{H}_t}{L_t}+\delta_H\frac{H_t}{L_t} \quad \Rightarrow \quad B(1-u)h_t=\frac{\dot{H}_t}{L_t}+\delta_H h_t$$

$$B(1-u)h_t=\dot{h}_t+(n+\delta_H)h_t$$

Resolviendo para $\dot{h}_t$, obtenemos:

$$\dot{h}_t = B(1-u)h_t - (n+\delta_H)h_t$$

Esta ecuación representa el proceso de acumulación del capital humano.

**Sistema de Ecuaciones Diferenciales**

1er Ecuación diferencial: $\dot{k}_t = Ak_t^{\alpha}u^{1-\alpha}h_t^{1-\alpha} - c_t - (n+\delta)k_t$

2da Ecuación diferencial: $\dot{h}_t = B(1-u)h_t - (n+\delta_H)h_t$

Para simplificar el análisis se supone que las tasas de depreciación de los tipos de capital son iguales $\delta_K = \delta_H = \delta$ .

### 6.10.4 Planteamiento del problema

*Lucas* asume que las familias productoras tienen la siguiente utilidad, la misma que maximizan.

$$Máx: \quad J = \int_0^{\infty}\left(\frac{c_t^{1-\theta}-1}{1-\theta}\right).e^{-(\rho-n)t}dt$$

Luego el planteamiento del problema será, que las familias productoras va elegir, aquella trayectoria de consumo y aquella fracción que le permite maximizar su fracción de bienestar a través del tiempo y sujeto a las condiciones de movimiento de la condición inicial.

$$Máx: \quad J = \int_0^{\infty}\left(\frac{c_t^{1-\theta}-1}{1-\theta}\right).e^{-(\rho-n)t}dt \ldots (\textit{Función objetivo})$$

$$s.a: \quad \begin{aligned} \dot{k}_t &= Ak_t^{\alpha}u^{1-\alpha}h_t^{1-\alpha} - c_t - (n+\delta)k_t \\ \dot{h}_t &= B(1-u)h_t - (n+\delta_H)h_t \end{aligned}$$

$$k(0) = k_0 \wedge h(0) = h_0 \ldots (\textit{Estado inicial de capital físico y humano})$$

$$k_0 \geq 0 \wedge h_0 \geq 0$$

$$0 \leq u \leq 1$$

Donde

$$Variable-de-control: \begin{cases} c_t \\ u_t \end{cases}$$

$$Variable-de-estado: \begin{cases} k_t \\ h_t \end{cases}$$

$$Variable-de-coestado: \begin{cases} \lambda_t \\ v_t \end{cases}$$

Planteamiento de la función Hamiltoniana tenemos:

$$\mathrm{H} \equiv H(c_t, u_t, k_t, h_t, \lambda_t, v_t, t)$$

$$\mathrm{H} = \left(\frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta}\right).e^{-(\rho-n)t} + \lambda_t\left[Ak_t^{\alpha}u^{1-\alpha}h_t^{1-\alpha} - c_t - (n+\delta)k_t\right] + v_t\left[B(1-u)h_t - (n+\delta_H)h_t\right]$$

**Condición de Primer Orden (CIO)**

**g)** Tomando la derivada del hamiltoniano con respecto de las variables de control e imponiendo la condición igual a cero.

$$\frac{\partial H}{\partial c_t} \equiv \frac{\partial U}{\partial c_t} + \frac{\partial \lambda_t}{\partial c_t} + \frac{\partial v_t}{\partial c_t} = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial c_t} = e^{-(\rho-n)t}.c_t^{-\theta} + \lambda_t(-1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad e^{-(\rho-n)t}.c_t^{-\theta} = \lambda_t \ldots (I)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_t} \equiv \frac{\partial U}{\partial u_t} + \frac{\partial \lambda_t}{\partial u_t} + \frac{\partial v_t}{\partial u_t} = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_t} = \lambda_t(1-\alpha)Ak_t^{\alpha}u^{-\alpha}h_t^{1-\alpha} - Bv_t h_t = 0 \ldots (II)$$

$$\lambda_t = \frac{Bv_t h_t u^{\alpha}}{(1-\alpha)Ak_t^{\alpha}h_t^{1-\alpha}} \ldots (II')$$

**h)** Tomando la derivada del Hamiltoniano con respecto a las variables de estado e imponiendo las condiciones del negativo de la derivada de los multiplicadores con respecto al tiempo.

$$\frac{\partial H}{\partial k_t} = -\dot{\lambda}_t \quad \Longrightarrow \quad \lambda_t\left[\alpha Ak_t^{\alpha-1}u^{1-\alpha}h_t^{1-\alpha} - (n+\delta)\right] = -\dot{\lambda}_t \ldots (III)$$

$$\left[\alpha Ak_t^{\alpha-1}u^{1-\alpha}h_t^{1-\alpha} - (n+\delta)\right] = -\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} \ldots (IV)$$

$$\frac{\partial H}{\partial h_t} = -\dot{v}_t \quad \Longrightarrow \quad \lambda_t\left[(1-\alpha)Ak_t^{\alpha}u^{1-\alpha}h_t^{-\alpha}\right] + v_t\left[B(1-u) - (n+\delta)\right] = -\dot{v}_t \ldots (V)$$

**i)** Tomando la derivada con respecto al multiplicadores lagrangiano tenemos:

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_t} = \dot{k}_t \quad \Longrightarrow \quad Ak_t^{\alpha}u^{1-\alpha}h_t^{1-\alpha} - c_t - (n+\delta)k_t = \dot{k}_t \ldots (VI)$$

$$\frac{\partial H}{\partial v_t} = \dot{v}_t \quad \Longrightarrow \quad B(1-u)h_t - (n+\delta)h_t = \dot{h}_t \ldots (VII)$$

**Condición de Segundo Orden (CIIO)**

$$\frac{\partial^2 H}{\partial c_t^2} = -\theta \frac{1}{e^{(\rho-n)t}} \cdot \frac{1}{c_t^{1+\theta}} < 0$$

*<0* x *0<*

Esta condición nos asegura un máximo.

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u_t^2} = -\alpha(1-\alpha)\lambda_t A u^{-(1+\alpha)} h_t^{1-\alpha} k_t^{\alpha} < 0$$

*<0* x *0<*

**Condición de Transversalidad**

$$\underset{t\to\infty}{Lím}\,\lambda_t k_t = 0$$

Esto quiere decir que $\lambda_t = 0$ (el precio implícito de capital en el periodo final) o que $k_t = 0$ (el stock de capital en el momento que muere).

$$\underset{t\to\infty}{Lím}\,\lambda_t = \frac{1}{c_t^{\theta}}\left(\cancelto{(1/\infty)\approx 0}{\frac{1}{e^{(\rho-n)\infty}}}\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \underset{t\to\infty}{Lím}\,\lambda_t = 0$$

$$\underset{t\to\infty}{Lím}\,v_t h_t = 0$$

$$\underset{t\to\infty}{Lím}\,v_t = 0$$

- ✓ Reemplazando ($II'$) en (V) tenemos:

$$\frac{Bv_t h_t u^{\alpha}}{A(1-\alpha)h_t^{1-\alpha}k_t^{\alpha}}\left[(1-\alpha)Ak_t^{\alpha}u^{1-\alpha}h_t^{-\alpha}\right] + v_t\left[B(1-u)-(n+\delta)\right] = -\dot{v}_t \ldots(VIII)$$

Operando y simplificando obtenemos

$$B-(n+\delta) = -\frac{\dot{v}_t}{v_t}\ldots(IX)$$

- ✓ De la ecuación (I) aplicaremos logaritmo

$$-(\rho-n)t - \theta Lnc_t = Ln\lambda_t \ldots(I')$$

- ✓ Tomando la derivada con respecto al tiempo y multiplicando por -1 a la ecuación ($I'$)

$$\frac{\partial[(\rho-n)t]}{\partial t} + \theta\frac{\partial[Ln(c_t)]}{\partial t} = -\frac{\partial[Ln(\lambda_t)]}{\partial t}$$

$$(\rho-n)+\theta\frac{\dot{c}_t}{c_t} = -\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t}$$

$$(\rho-n)+\theta\gamma_c = -\gamma_\lambda \ldots(X)$$

$$\gamma_c^* = \frac{1}{\theta}\left[-\gamma_\lambda - (\rho-n)\right]$$

Reemplazando la ecuación (IV) en la ecuación (X) y despejando la tasa de crecimiento del consumo

$$\gamma_c^* = \frac{1}{\theta}\left[\alpha A k_t^{\alpha-1} u^{1-\alpha} h_t^{1-\alpha} - (n+\delta) - (\rho - n)\right] \quad \Rightarrow \quad \gamma_c^* = \frac{1}{\theta}\left[\alpha A k_t^{\alpha-1} u^{1-\alpha} h_t^{1-\alpha} - (\rho+\delta)\right]$$

Esta ecuación de la tasa de crecimiento del consumo nos quiere decir, que la tasa de crecimiento del consumo depende del producto marginal del capital físico menos la tasa de depreciación y la tasa de descuento intertemporal entre la utilidad marginal del consumo.

Como se aprecia en la ecuación donde el producto marginal de capital físico depende del capital humano y de la fracción que utiliza el sector final.

- ✓ Reemplazando la ecuación (IV) en la ecuación (X)

$$(\rho - n) + \theta.\gamma_c^* = \alpha A k_t^{\alpha-1} u^{1-\alpha} h_t^{1-\alpha} - (n+\delta)$$

Operando tenemos:

$$\frac{(\rho-\delta)+\theta.\gamma_c^*}{\alpha A u^{1-\alpha}} = k_t^{\alpha-1} h_t^{1-\alpha} \ldots (XI)$$

Lucas nos dice que en el estado proporcionado todas las variables crecen a la misma tasa constante. Y sabemos que la tasa de crecimiento de *u* debe ser cero por que es una fracción.

- ✓ Tomando logaritmo a la ecuación (XI)

$$Ln\left[\frac{(\rho-\delta)+\theta.\gamma_c^*}{\alpha A (u^*)^{1-\alpha}}\right] = (\alpha-1) Ln(k_t) + (1-\alpha) Ln(h_t)$$

Derivando con respecto al tiempo a la ecuación anterior obtenemos:

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\left(Ln\left[\frac{(\rho-\delta)+\theta.\gamma_c^*}{\alpha A (u^*)^{1-\alpha}}\right]\right)} = (\alpha-1)\frac{d}{dt}\underbrace{Ln(k_t)} + (1-\alpha)\frac{d}{dt}\underbrace{Ln(h_t)}$$

$$0 \qquad = \qquad (\alpha-1)\frac{\dot{k}_t}{k_t} \qquad - (\alpha-1)\frac{\dot{h}_t}{h_t}$$

$$0 = (\alpha-1)\gamma_k^* - (\alpha-1)\gamma_h^*$$

$$\gamma_h^* = \gamma_k^*$$

Esto demuestra que la tasa de crecimiento del capital físico es igual a la tasa de crecimiento del capital humano.

- ✓ Dividiendo entre $k_t$ a la ecuación de movimiento de capital físico

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t} = \frac{A k_t^{\alpha} u^{1-\alpha} h_t^{1-\alpha}}{k_t} - \frac{c_t}{k_t} - (\delta+n) \quad \Rightarrow \quad \frac{c_t}{k_t} = \frac{A k_t^{\alpha} u^{1-\alpha} h_t^{1-\alpha}}{k_t} - (\delta+n) - \frac{\dot{k}_t}{k_t}$$

Aplicando logaritmo a la ecuación anterior

$$Ln(c_t) - Ln(k_t) = Ln\left[A(u^*)^{1-\alpha}\right] + Ln\left[\left(\frac{h_t}{k_t}\right)^*\right]^{1-\alpha} - Ln(\delta + n) - Ln(\gamma_k^{\ *})$$

Como en el estado de crecimiento proporcionado las tasa de crecimiento son constantes. Derivando a la ecuación anterior por el tiempo

$$\frac{d}{dt}\left[Ln(c_t)\right] - \frac{d}{dt}\left[Ln(k_t)\right] = 0 + 0 - 0 - 0$$

$$\gamma_c^* = \gamma_k^* = 0$$

$$\gamma_c^* = \gamma_k^*$$

Esto demuestra que la tasa de crecimiento del consumo es igual a la tasa de crecimiento del capital físico.

✓ De la función de producción intensiva del bien final se tiene: $y_t = Ak_t^{\alpha} u^{1-\alpha} h_t^{1-\alpha} \ldots (FPI)$

Aplicando logaritmo a la función intensiva de bienes finales

$$Ln(y_t) = Ln(A) + \alpha Ln(k_t) + (1-\alpha)Ln(u) + (1-\alpha)Ln(h_t)$$

Aplicando una derivada temporal a la expresión anterior

$$\frac{d}{dt}\left[Ln(y_t)\right] = \frac{d}{dt}\left[Ln(A)\right] + \alpha\frac{d}{dt}\left[Ln(k_t)\right] + (1-\alpha)\frac{d}{dt}\left[Ln(u)\right] + (1-\alpha)\frac{d}{dt}\left[Ln(h_t)\right]$$

$$\gamma_y = \alpha\gamma_y + (1-\alpha)\gamma_u + (1-\alpha)\gamma_h$$

Recordemos que en el estado de crecimiento proporcionado $\gamma_u^* = 0$ y $\gamma_k^* = \gamma_h^*$, reemplazando en la expresión anterior tenemos:

$$\gamma_y^* = \alpha\gamma_h^* + (1-\alpha)0 + (1-\alpha)\gamma_h^* \quad \Rightarrow \quad \gamma_y^* = \alpha\gamma_h^* + (1-\alpha)0 + (1-\alpha)\gamma_h^*$$

$$\gamma_y^* = \alpha\gamma_h^* + \gamma_h^* - \alpha\gamma_h^*$$

$$\gamma_y^* = \gamma_h^*$$

Esto demuestra que la tasa de crecimiento del producto es igual a la tasa de crecimiento del capital humano.

Por lo que *Lucas* llego a la conclusión que todas las tasa de crecimiento son iguales y constante.

$$\gamma_j^* = \gamma_h^* = \gamma_c^* = \gamma_y^*$$

✓ De la condición de primer orden (ecuación (II)) multiplicando por $u_t$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)u = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_t\left[(1-\alpha)Au^{1-\alpha}h_t^{1-\alpha}\right] - Bh_t u v_t = 0$$

En el estado de crecimiento proporcionado, la tasa de crecimiento de *t u* debe ser cero por que es una fracción.

$$\frac{\lambda_t}{v_t} = \frac{Bh_t^* u^*}{(1-\alpha)A(u^*)^{1-\alpha}(h_t^*)^{1-\alpha}} \quad \Rightarrow \quad Ln\left(\frac{\lambda_t}{v_t}\right) = Ln\left(\frac{Bh_t^* u^*}{(1-\alpha)A(u^*)^{1-\alpha}(h_t^*)^{1-\alpha}}\right)$$

Derivado con respecto al tiempo y recortado que el estado de crecimiento proporcionado todas las variables crece a un ritmo constante.

$$\frac{dLn(\lambda_t)}{dt} - \frac{dLn(v_t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[Ln\left(\frac{Bh_t^* u^*}{(1-\alpha)A(u^*)^{1-\alpha}(h_t^*)^{1-\alpha}}\right)\right] \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} - \frac{\dot{v}_t}{\lambda_t} = 0$$

$$\gamma_\lambda^* - \gamma_v^* = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma_\lambda^* = \gamma_v^*$$

✓ Como se demostró que $\gamma_\lambda^* = \gamma_v^*$, igualando la ecuación (IV) con la ecuación (X)

$$B-(n+\delta) = (\rho - n) + \theta.\gamma_c^*$$

$$\gamma_c^* = \frac{B-(\rho+\delta)}{\theta}$$

✓ Igualando la ecuación (X) con la ecuación (IV)

$$(\rho - n) + \theta\gamma_c^* = \frac{-\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} = \alpha A k_t^{\alpha-1} u^{1-\alpha} h_t^{1-\alpha} - (n+\delta)$$

Operando se obtiene:

$$\gamma_c^* = \frac{Pmgk - (\rho+\delta)}{\theta}$$

Se asume competencia perfecta en los mercados de bienes y factores

✓ Del mercado de capital físico se tiene:

$$Pmgk = R \Rightarrow Pmgk = r + \delta$$

$$R = r + \delta$$

Reemplazando el producto marginal del capital físico en la expresión de la tasa de crecimiento del consumo se tiene:

$$\gamma_c^* = \frac{r+\delta-(\rho+\delta)}{\theta} \quad \Rightarrow \quad \gamma_c^* = \frac{r-\delta}{\theta}$$ , la regla de *Ramsey – Keynes*

La regla de *Keynes-Ramsey*, nos quiere decir que, a lo largo de la senda optima pequeñas modificaciones en el consumo que impliquen un ahorro hoy para una mejora en el futuro no conllevan aumento de bienestar social, por otra parte los rendimientos decrecientes a escala del capital hacen que cualquier posible aumento en el crecimiento en el corto plazo, obtenido por alguna política de ahorro e inversión desaparezca en el largo plazo (*Blanchard y Fischer* 1898).

### *6.11 Modelo de Aprendizaje y Derrame de conocimiento*

Uno de los pioneros de los nuevos modelos de crecimiento endógeno, *Paul Romer* (1990), plante que el conocimiento es el resultado de la inversión, el objetivo consiste en proporcionar un marco teórico que explique y permita modelar, de manera mas adecua da, el tipo de cambio tecnológico al que se enfrentan las economías en la actualidad en donde el elemento desconocimiento es fundamental.

Por el contrario, el modelo de Romer es un modelo de generaciones de capital. Los nuevos bienes de capital son inventados en cada periodo, pero el capital nuevo no es mejor que el anterior. Es simplemente diferente y amplio el menú de aportaciones disponibles, lo que se supone que hace más eficaz la producción. De esta forma el capital no se hace obsoleto cuando envejece –una consecuencia que niega el hecho obvio de que las viejas tecnologías son continuamente sustituidas por otras nuevas.

*Romer* (1989), destaca que el grado en que un bien económico es excluyente y rival, son atributos fundamentales, ya sea para su uso en la producción o el consumo. Existen algunos bienes intangibles como los diseños, que frecuénteme solo son parcialmente excluibles, en el sentido de que un mismo diseño puede ser utilizado simultáneamente en muchos procesos productivos. El alcance de rivalidad de un bien esta totalmente determinado por la tecnología y por las instituciones de una economía particular, así si un bien es no rival, excluir su uso requiere de cualquier medio tecnológico para prevenir acceso al bien o un sistema legal que evite que otros puedan usar el insumo aunque tecnológicamente sea posible usarlo.[52]

#### 6.11.1 Supuestos del modelo

- ✓ Sea una economía capitalista donde existen numerosas empresas.
- ✓ Dichas empresas producen un solo bien.
- ✓ Se considera al conocimiento como en bien publico.
- ✓ El conocimiento es un subproducto de la experiencia y el aprendizaje.
- ✓ El conocimiento es una externalidad.
- ✓ El stock de capital se deprecia a una tasa constante $\delta$ .
- ✓ La acumulación del capital físico es vía decremento del consumo.
- ✓ El progreso tecnológico es aumentativo de la eficiencia del trabajo.
- ✓ En esta economía toda la población trabaja.

#### Análisis

En este modelo, las empresas no toman decisiones y se considera que todas son iguales, producen el mismo y único bien, tomando su precio como dado.

$$Y = \sum_{t=1}^{M} y_t \quad \Rightarrow \quad Y = My_t$$

$$K = \sum_{t=1}^{M} k_t \quad \Rightarrow \quad K = Mk_t$$

[52] *Romer* (1986) y *Lucas* (1988), introducen formas de conocimiento que son parcialmente excluibles y rivales y parcialmente no excluibles y no rivales. En cambio *Arrow* (1962), nos dice que la no rivalidad del conocimiento es producida solamente por sus efectos secundarios en algunas otras actividades.

$$L = \sum_{t=1}^{M} l_t \quad \Rightarrow \quad L = Ml_t$$

Donde

$M$ : Representa el número de empresas.

$y_t$ : Representa la producción de la i-esíma empresa.

$k_t$ : Representa el stock de capital de la i-esíma empresa.

$l_t$ : Representa la fuerza de trabajo del i-esíma trabajador.

### Función de producción agregada

Si sumamos la producción de todas las empresas entones la función de producción agregada será de tipo *Cobb-Douglas* y tendrá la siguiente forma:

$$Y_t = K_t^{\alpha} \left(BL_t\right)^{1-\alpha}$$
$$s.a: \quad 0 < \alpha < 1$$

Donde

$Y_t$ : Producción agregada de la i-esíma empresa en el instante "*t*".

$K_t$ : Stock de capital agregado en el instante *t*.

$B$ : Representa al conocimiento que es la inversión bruta acumulada.

En un Capítulo IV de este libro, exactamente en la parte 4.2, *Arrow* (1962) nos dice que el conocimiento de la empresa estaba vinculada a la experiencia y nos pone de ejemplo la industria aeronáutica. Nos dice que el "aprendizaje *en la practica*", es en buena medida del aumento de la experiencia era la inversión, debido a que la empresa añade nuevas maquinas, por lo que el aprendizaje recibe constantemente nuevos estímulos.

El *desbordamiento de conocimiento* nos quiere decir; Que el stock de conocimiento de la economía crecerá de forma paralela a la cantidad total de inversión, de modo que $\dot{B} = \dot{\kappa}_t$, si integramos a la inversión bruta acumulada desde el principio de los tiempos hasta el presente, quedara expresado como:

$$B = \int_0^{\infty} I dt = \kappa_t$$

Esto quiere decir que en momento *t*, el conocimiento es proporcional al stock de capital

Reemplazando $B$, en la función de producción agregada, donde se demuestra que el conocimiento es una externalidad positivo.

$$Y_t = K_t^{\alpha} \kappa_t^{1-\alpha} L_t^{1-\alpha} \ldots (FPA)$$

A nuestros juicios un elemento fundamental ligado por lo general al conocimiento: La introducción de externalidades positivas asociadas a su generación y, sobre todo, difusión en el conjunto de la economía (si bien, puede existir otras externalidades están unidas a los niveles de inversión, etc.) se produce por causas ajenas a la propia economía. Por el contrario, en los modelos endógenos los agentes económicos tienen la capacidad de potenciar (o, se en caso, ralentizar) la velocidad de generación del conocimiento.[53]

**Propiedades de la función agregada**

- ✓ $F(K_t, L_t) = K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} \kappa_t^{\eta}$

  Si multiplicamos a la función por un $\lambda > 0$

  $F(\lambda K_t, \lambda L_t) = (\lambda K_t)^{\alpha} (\lambda L_t)^{1-\alpha} \kappa_t^{\eta}$

  $F(\lambda K_t, \lambda L_t) = \lambda . Y_t$

  La función presenta rendimientos de escala constante cuando $\kappa_t$ permanece constante

- ✓ Los productos marginales del capital y trabajo son positivos.

$$\frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = PmgK = \underbrace{\alpha}_{+} \underbrace{K_t^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha} \kappa_t^{\eta}}_{+} > 0$$

$$\frac{\partial Y_t}{\partial L_t} = PmgL = \underbrace{(1-\alpha)}_{+} \underbrace{K_t^{\alpha} L_t^{-\alpha} \kappa_t^{\eta}}_{+} > 0$$

La derivada de los productos marginales es decreciente y negativa.

$$\frac{\partial^2 Y_t}{\partial K_t^2} = \frac{\partial PmgK}{\partial K_t} = \underbrace{\alpha}_{+} \underbrace{(\alpha - 1)}_{-} \underbrace{K_t^{\alpha-2} L_t^{1-\alpha} \kappa_t^{\eta}}_{+} < 0$$

Recordemos $0 < \alpha < 1$, entonces $0 < \alpha < 1 \ldots -1 \Rightarrow -1 < \alpha - 1 < 0$ es una constante negativa.

$$\frac{\partial^2 Y_t}{\partial L_{tt}^2} = \frac{\partial PmgL}{\partial L_t} = \underbrace{(-\alpha)}_{-} \underbrace{(1-\alpha)}_{+} \underbrace{K_t^{\alpha} L_t^{-(1+\alpha)} \kappa_t^{\eta}}_{+} > 0$$

Recordemos que $0 < \alpha < 1$, entonces $0 < \alpha < 1 \ldots x - 1 \Rightarrow -1 < -\alpha < 0 \ldots +1$ es una constante positiva $0 < 1 - \alpha < 1$.

- ✓ Veremos que los límites requeridos por las condiciones de INADA se cumplen:

$(1/\infty) \approx 0$

$$\lim_{K \to \infty} PmgK = \alpha \frac{1}{K_t^{1-\alpha}} . \kappa_t^{\eta} L_t^{1-\alpha} = 0$$

$(1/0) \approx \infty$

$$\lim_{K \to 0} PmgK = \alpha \frac{1}{K_t^{1-\alpha}} . \kappa_t^{\eta} L_t^{1-\alpha} = \infty$$

$(1/\infty) \approx 0$

$$\lim_{L \to \infty} PmgL = (1-\alpha) K_t^{\alpha} \kappa_t^{\eta} \frac{1}{L_t^{\alpha}} = 0$$

$(1/) \approx \infty$

[53] Grupo de Economía Dinámica. (2003) "Una Síntesis de las aproximaciones Neoclásica y evolutiva al Crecimiento Endógeno",No1#, Institutos de Investigaciones Económicas y Sociales <<Francisco de Victoria>>, Pág.:12

$$\underset{L\to 0}{Lím}\, PmgL = (1-\alpha)K_t^{\alpha}\kappa_t^{\eta}\frac{1}{L_t^{\alpha}} = \infty$$

Ahora demostraremos que la funciona obtenida cumple con las propiedades Neoclásicas para esto deberemos asumir que $0 < \alpha < 1$.

$$\frac{Y_t}{L_t} = \frac{K_t^{\alpha}}{L_t^{\alpha}}\kappa_t^{1-\alpha}\frac{L_t^{1-\alpha}}{L_t^{1-\alpha}} \quad \Longrightarrow \quad y_t = k_t^{\alpha}\kappa_t^{1-\alpha} \ldots (FPI)$$

## Ecuación Dinámica fundamental

Partiendo de la condición macroeconómica

$$Y_t = C_t + I^b$$

$$Y_t = C_t + I_K^n + I_K^{rep}$$

Según la terminología de *Paul Romer* (1990), el capital se va formando a partir de una dotación inicial del mismo gracias al ahorro generado en la economía. Este ahorro se destina completamente a inversión: En términos macroeconómicos, la inversión suele definirse de modo habitual $I^b = \dot{K}_t = Y_t - C_t - \delta K_t$, siendo $\delta \geq 0$ la depreciación del capital.[54]

$$Y_t = C_t + \dot{K}_t + \alpha K_t$$

Dividiendo a la ecuación anterior entre la cantidad de trabajadores de esta economía

$$\frac{Y_t}{L_t} = \frac{C_t}{L_t} + \frac{\dot{K}_t}{L_t} + \delta\frac{K_t}{L_t} \Rightarrow y_t = c_t + \frac{\dot{K}_t}{L_t} + \delta k_t \ldots (\Omega)$$

Sabemos que $k_t = \dfrac{K_t}{L_t} \Rightarrow \dfrac{dk_t}{dt} = \dfrac{d(K_t/L_t)}{dt}$ $\quad \Longrightarrow \quad$ $\dot{k}_t = \dfrac{\dot{K}_t}{L_t}\dfrac{L_t}{L_t} - \dfrac{\dot{L}_t}{L_t}\dfrac{K_t}{L_t}$

$$\dot{k}_t = \frac{\dot{K}_t}{L_t} - nk_t \Rightarrow \frac{\dot{K}_t}{L_t} = \dot{k}_t + nk_t \ldots (\Theta)$$

Reemplazando ($\Theta$) en ($\Omega$)

$$y_t = c_t + \left(\dot{k}_t + nk_t\right) + \delta k_t \quad \Longrightarrow \quad \dot{k}_t = y_t - c_t - (n+\delta)k_t$$

Reemplazando la (FPI) en la ecuación tenemos:

$$\dot{k}_t = k_t^{\alpha}\kappa_t^{1-\alpha} - c_t - (n+\delta)k_t$$

Es una ecuación diferencial del proceso de acumulación del capital en una economía donde se considera al conocimiento como una externalidad.

---

[54] El lector interesado puede revisar el artículo de Romer, Paul.M (1990) "Endogenous Technological Change", Journal of Political Economy, 98, 5, S71 -S102

### 6.11.3 Planteamiento del problema

*Romer* asume que las familias maximizan su bienestar social, con una función de utilidad agregada de la siguiente forma:

$$U_{c(t)} = \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta}$$

Luego las familias productoras eligen aquella trayectoria de crecimiento del consumo por trabajador, de tal manera que le permite maximizar en un horizonte temporal de muy largo plazo sujeta a las ecuaciones de movimiento y a las condiciones iniciales

$$Máx: \quad J = \int_0^{\infty} \left( \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta} \right) . e^{-(\rho - n)t} dt \ldots (\textit{Función objetivo})$$

$$s.a: \ \dot{k}_t = k_t^{\alpha} \kappa_t^{1-\alpha} - c_t - (n+\delta) k_t \ldots (\textit{Ecuación de Movimiento})$$

$$k(0) = k_0 \ldots (\textit{Estado inicial})$$

$$0 \leq t \leq \infty$$

Donde

Variable de estado: $k_t$

Variable de control: $c_t$

Variable de coestado: $\lambda_t$

Para solucionar el problema de maximización plantearemos el Hamiltoniano de la función

#### Condición de Primer Orden (CIO)

**a.** Tomando la derivada del hamiltoniano con respecto de la variable de control e igualándolo a cero.

$$\frac{\partial H}{\partial c_t} = e^{-(\rho - n)t} . c_t^{-\theta} + \lambda_t (-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{-(\rho - n)t} . c_t^{-\theta} = \lambda_t \ldots (I)$$

**b.** Tomando la derivada del Hamiltoniano con respecto a la variable de estado e imponiendo la condición del negativo de la derivada del multiplicado con respecto al tiempo.

$$\frac{\partial H}{\partial k_t} = -\dot{\lambda}_t \quad \Rightarrow \quad \lambda_t \left[ \alpha k_t^{\alpha - 1} \kappa_t^{1-\alpha} - (n+\delta) \right] = -\dot{\lambda}_t$$

$$\left[ \alpha k_t^{\alpha - 1} \kappa_t^{1-\alpha} - (n+\delta) \right] = -\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} \ldots (II)$$

**c.** Tomando la derivada con respecto al multiplicador lagrangiano tenemos:

$$\Rightarrow$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_t} = \dot{k}_t \qquad k_t^{\alpha}\kappa_t^{1-\alpha} - c_t - (n+\delta)k_t = \dot{k}_t \ldots (III)$$

$$\dot{k}_t = s.(1-\tau)Ak_t^{\alpha}g_t^{1-\alpha} - (n+\delta)k_t \ldots (III)$$

**Condición de Segundo Orden (CIIO)**

$$\frac{\partial^2 H}{\partial c_t^2} = \underbrace{-\theta}_{<0}\ x\ \underbrace{\frac{1}{e^{(\rho-n)t}}\, x\, \frac{1}{c^{1+\theta}}}_{0<} < 0$$

Esta condición nos asegura un consumo máximo

**Condición de Transversalidad**

$$\underset{t\to\infty}{Lím}\,\lambda_t k_t = 0$$

Esto quiere decir que $\lambda_t = 0$ (el precio implícito de capital en el periodo final) o que $k_t = 0$ (el stock de capital en el momento que muere).

$$\underset{t\to\infty}{Lím}\,\lambda_t = \overset{(1/\infty)\approx 0}{\cancel{\frac{1}{e^{(\rho-n)\infty}}}} \quad \Rightarrow \quad \underset{t\to\infty}{Lím}\,\lambda_t = 0$$

Aplicando logaritmo neperiano a la ecuación (I) tenemos:

$$-\theta Lnc_t - (\rho - n)t = Ln\lambda_t$$

Aplicando la derivada temporal a la ecuación y multiplicando por -1 a toda la ecuación

$$(\rho - n) + \theta.\frac{\dot{c}_t}{c_t} = -\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} \ldots (IV)$$

Igualando la ecuación (II) y (IV)

$$\left[\alpha k_t^{\alpha-1}\kappa_t^{1-\alpha} - (n+\delta)\right] = -\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} = (\rho - n) + \theta\,\frac{\dot{c}_t}{c_t}$$

Operando y despejando: $\frac{\dot{c}_t}{c_t}$

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{\alpha k_t^{\alpha-1}\kappa_t^{1-\theta} - (\rho+\delta)}{\theta} \quad \Rightarrow \quad \gamma_c = \frac{\alpha k_t^{\alpha-1}\kappa_t^{1-\theta} - (\rho+\delta)}{\theta} \ldots (V)$$

Sabemos que: $y_t = k_t^{\alpha}\kappa_t^{1-\alpha}$ $\Rightarrow$ $\frac{\partial y_t}{\partial k_t} = Pmgk = \alpha k_t^{\alpha-1}\kappa_t^{1-\alpha}$

$$Pmgk = R$$
$$R = r + \delta \Rightarrow r = R - \delta$$

Donde

$R$ : Tasa de rendimiento bruto de capital.

$r$ : Tasa de rendimiento del capital

$\theta$ : Representa la elasticidad de la utilidad marginal del consumo.

Reemplazando estas tres condiciones en la tasa de consumo (ecuación V)

$$\gamma_c^* \frac{Pmgk - (\rho + \delta)}{\theta}$$

$$\gamma_c^* \frac{R - (\rho + \delta)}{\theta}$$

$$\gamma_c^* \frac{r + \delta - (\rho + \delta)}{\theta}$$

$\gamma_c^* = \dfrac{r - \rho}{\theta}$ , la proposición de *Ramsey – Keynes*

Supongamos que la tasa de interés es constante y examinamos las trayectorias óptimas de consumo, en tres casos que se muestran a continuación:

### Caso I

En este caso la tasa de crecimiento de consumo es positiva, entonces consumo aumenta cada momento del nivel inicial de $c_0$.

$$\gamma_c^* = \frac{r - \rho}{\theta} > 0 \Rightarrow r > \rho$$

### Caso II

La tasa de crecimiento de consumo es cero, entonces consumo es constante, igual a su nivel inicial para siempre.

$$\gamma_c^* = \frac{r - \rho}{\theta} = 0 \Rightarrow r = \rho$$

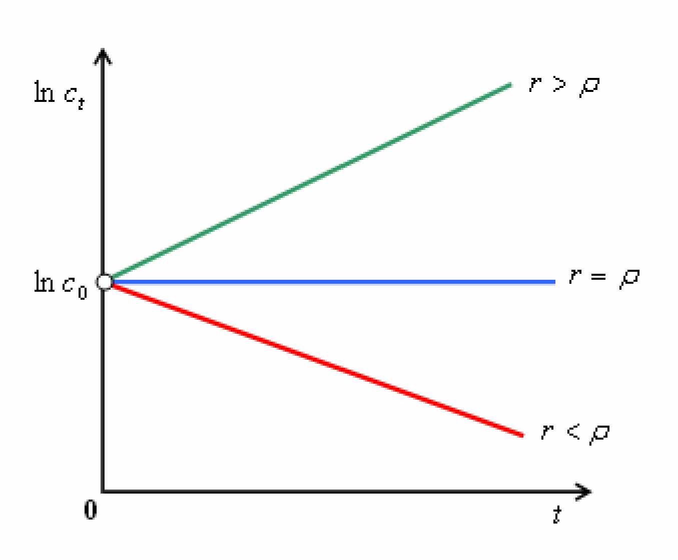
### Caso III

En este caso, la tasa de interés no es suficiente por lo que la persona decide que su preferencia de consumir ahora, es decir $r < \rho$.

$$\gamma_c^* = \frac{r - \rho}{\theta} < 0 \Rightarrow r < \rho$$

Todos estos casos se pueden apreciar en el gráfico [6.31], donde la tasa de interés de capital, es mayor, menor e igual a la tasa de descuento.

**Gráfico [6.31]: Trayectorias posibles del consumo**




- ✓ *Romer* asume que la externalidad va ser el conocimiento $\kappa_t$ y esta va ser igual al stock de capital.

$$\kappa_t = K_t$$

Reemplazando la externalidad asumida por *Romer* en la función de producción agregada del modelo

$$Y_t = K_t^{\alpha}\left(K_t\right)^{1-\alpha} L_t^{1-\alpha}$$

Dividiendo la ecuación anterior entre el numero de trabajadores

$$\frac{Y_t}{L_t} = \frac{K_t^{\alpha}}{L_t^{\alpha}}\left(K_t\right)^{1-\alpha}\frac{L_t^{1-\alpha}}{L_t^{1-\alpha}} \quad \Rightarrow \quad y_t = k_t^{\alpha}\left(K_t\right)^{1-\alpha}\ldots(\sigma)$$

Pero sabemos que $k_t = \dfrac{K_t}{L_t} \Rightarrow K_t = k_t L_t \ldots(\xi)$

Reemplazando ($\xi$) en ($\sigma$)

$$y_t = k_t^{\alpha}\left(k_t L_t\right)^{1-\alpha} \quad \Rightarrow \quad y_t = k_t L_t^{1-\alpha}\ldots(FPI)$$

## Ecuación Dinámica fundamental

De la condición de equilibrio macroeconómico

$$Y_t = C_t + I^b$$

$$Y_t = C_t + I_K^n + I_K^{rep}$$

$$\frac{Y_t}{L_t}=\frac{C_t}{L_t}+\frac{\dot{K}_t}{L_t}+\delta\frac{K_t}{L_t}\Rightarrow y_t=c_t+\frac{\dot{K}_t}{L_t}+\delta k_t\ldots(\pi)$$

Sabemos que $k_t=\frac{K_t}{L_t}\Rightarrow\frac{dk_t}{dt}=\frac{d(K_t/L_t)}{dt}$ $\Rightarrow$ $\dot{k}_t=\frac{\dot{K}_t}{L_t}\frac{L_t}{L_t}-\frac{\dot{L}_t}{L_t}\frac{K_t}{L_t}$

$$\dot{k}_t=\frac{\dot{K}_t}{L_t}-nk_t\Rightarrow\frac{\dot{K}_t}{L_t}=\dot{k}_t+nk_t\ldots(\varpi)$$

Reemplazando ($\varpi$) en ($\pi$)

$$y_t=c_t+\left(\dot{k}_t+nk_t\right)+\delta k_t \quad\Rightarrow\quad \dot{k}_t=k_tL_t^{1-\alpha}-c_t-(n+\delta)k_t$$

En este modelo existe un efecto escala, que quiere decir que la tasa de cambio del producto por trabajador depende directamente del crecimiento de la población $\dot{k}_t=f(n,L_t)$.

Al respecto *Romer* asume:

- Que la población se mantiene constante ósea $L_t^{1-\alpha}=b$
- Que la tasa de crecimiento de la población es nula $n=0$.

Al reemplazar los supuestos anteriores en la ecuación dinámica, llegamos a la conclusión que se trata de una extensión de los modelo AK, donde no existe tasa de crecimiento proporcionado, sino tasa de crecimiento y progresivo, y esto por que la curva de ahorro y depreciación no se curtan en una punto, por ende el capital por trabajador queda indeterminado en la economía.

Reemplazando $b$, en la función de producción intensiva obtenemos: $y_t=k_tb$ tendrá la forma de una recta con pendiente positiva como se puede apreciar en el grafico [6.31], donde se grafica la curva de ahorro bruto por trabajador $s.bk_t$ y la curva ampliada bruta por trabajador $\delta k_t$.

### Versión de Barro

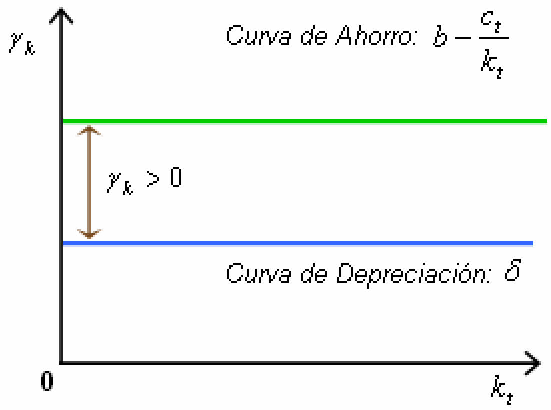
Dividiendo la ecuación dinámica fundamental, entre la cantidad de trabajadores, obtenemos la tasa de crecimiento por trabajador:

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t}=b-\frac{c_t}{k_t}-\delta \quad\Rightarrow\quad \gamma_k=b-\frac{c_t}{k_t}-\delta$$

En el estado de crecimiento proporcionado; $\gamma_k>0$

Si $\gamma_k>0$ entonces $\left(b-\frac{c_t}{k_t}\right)>\delta$, esto nos quiere decir que la tasa de ahorro supera curva de depreciación como muestra el grafico [6.32], donde se aprecia que no existe un capital por trabajador y esto debido por que las curvas antes mencionadas no se cruzan en ningún punto y con esto queda indeterminado el capital por trabajador.

**Gráfico [6.32]: Trayectorias posibles del consumo**




## *6.12 Modelo de Jones-Manuelli*

En esta parte intentaremos presentar una tecnología que presente rendimientos decrecientes de capital, pero que viola las condiciones de Inada.

Esta función fue propuesta originalmente por *Kurz* (1968) y después fue reintroducida a la literatura del crecimiento económico por *Jones* y *Manuelli* (1990).

### 6.12.1 Supuestos del modelo

Abandona la función de producción Neoclásica y asumen:

Asume una función de producción tipo *Sobelow*

La función tiene rendimientos constantes a escala.

La función presenta rendimientos positivos de capital y trabajo.

Viola los supuestos de Inada.

Representa una tasa de ahorro constante.

### Función de producción agregada (*Sobelow)*

Sea una función de producción que combina la función *Cobb-Douglas* y la función de producción AK, mencionada en Capítulo anterior de este libro. Por lo que la función de producción tiene la forma:

$$Y_t = AK_t + BK_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} \ldots (FPA)$$
$$s.a: \quad 0 < \alpha < 1$$

Donde

$Y_t$: Producto agregado en el instante "*t*".

$K_t$: Stock de capital agregado en el instante "*t*".

$L_t$: Fuerza de trabajo agregada en el instante "*t*".

$A$: Índice de nivel de tecnología de la función de producción AK.

$B$: Índice de nivel de trabajo en la función de producción tipo *Cobb-Douglas*.

$\alpha$ : Elasticidad del producto respecto al capital.

$1-\alpha$ : Elasticidad producto respecto a la fuerza de trabajo.

**Propiedades de la función de producción**

$$F(K_t, L_t) = AK_t + BK_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}$$

Si multiplicamos a la función por un $\lambda > 0$

$$F(\lambda K_t, \lambda L_t) = A(\lambda K_t) + B(\lambda K_t)^{\alpha} (\lambda L_t)^{1-\alpha}$$

$$F(\lambda K_t, \lambda L_t) = \lambda.\left(AK_t + BK_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}\right) = \lambda Y_t$$

La función presenta rendimientos de escala constante

Los productos marginales del capital y trabajo son positivos.

$$\frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = PmgK = \underbrace{A}_{+} + \underbrace{\alpha BK_t^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha}}_{+} > 0$$

$$\frac{\partial Y_t}{\partial L_t} = PmgL = \underbrace{(1-\alpha)}_{+}\underbrace{BK_t^{\alpha} L_t^{-\alpha}}_{+} > 0$$

Recordemos que $0 < \alpha < 1$ entonces $-\alpha > -1 \ldots +1 \Rightarrow 1-\alpha > 0$, es un valor positivo

La derivada de los productos marginales es decreciente y negativa.

$$\frac{\partial^2 Y_t}{\partial K_t^2} = \frac{\partial PmgK}{\partial K_t} = \underbrace{\alpha}_{+}\underbrace{(\alpha-1)}_{-}\underbrace{BK_t^{\alpha-2} L_t^{1-\alpha}}_{+} < 0$$

Recordemos $0 < \alpha < 1$, entonces $0 < \alpha < 1 \ldots -1 \Rightarrow -1 < \alpha - 1 < 0$ es una constante negativa.

$$\frac{\partial^2 Y_t}{\partial L_{tt}^2} = \frac{\partial PmgL}{\partial L_t} = \underbrace{(-\alpha)}_{-}\underbrace{(1-\alpha)}_{+}\underbrace{BK_t^{\alpha} L_t^{-(1+\alpha)}}_{+} > 0$$

Recordemos que $0 < \alpha < 1$, entonces $0 < \alpha < 1 \ldots x-1 \Rightarrow -1 < -\alpha < 0 \ldots +1$ es una constante positiva $0 < 1-\alpha < 1$.

Veremos que los límites requeridos por las condiciones de INADA se cumplen:

$$(1/\infty) \approx 0$$

$$\underset{K\to\infty}{Lím}\, PmgK = A + \alpha B \frac{1}{K_t^{1-\alpha}} .\kappa_t^{\eta} L_t^{1-\alpha} = A$$

$$(1/0) \approx \infty$$

$$\underset{K\to 0}{Lím}\, PmgK = A + \alpha B \frac{1}{K_t^{1-\alpha}} .\kappa_t^{\eta} L_t^{1-\alpha} = \infty$$

$$(1/\infty) \approx 0$$

$$\underset{L\to\infty}{Lím}\, PmgL = (1-\alpha) BK_t^{\alpha} \frac{1}{L_t^{\alpha}} = 0$$

$$(1/0) \approx \infty$$

$$\underset{L\to 0}{Lím}\, PmgL = (1-\alpha)BK_t^{\alpha}\,\frac{1}{L_t^{\alpha}} = \infty$$

Vemos que cumple las condiciones de INADA pero solo parcialmente, por que la única diferencia es la primera condición de INADA.

### 6.12.2 Ecuación dinámica fundamental

- ✓ Para hallar la función en términos por trabajador pasa remos a dividir la función de producción de la economía entre la fuerza de trabajo agregada

$$\frac{Y_t}{L_t} = A\frac{K_t}{L_t} + B\frac{K_t^{\alpha}}{L_t^{\alpha}}\frac{L_t^{1-\alpha}}{L_t^{1-\alpha}} \Rightarrow \qquad y_t = Ak_t + Bk_t^{\alpha} \ldots \text{(FPI Sobelow)}$$

De la ecuación fundamental de *Solow – Swan*

$$\dot{k}_t = sf(k_t) - (n+\delta)k_t$$

Se tiene: $y_t = Ak_t + Bk_t^{\alpha}$
Reemplazando en la ecuación de *Solow – Swan*

$$\dot{k}_t = sAk_t + sBk_t^{\alpha} - (n+\delta)k_t$$ , la ecuación de *Jones -Manuelli*

Significa que es una ecuación diferencial del proceso de acumulación de capital en una economía capitalista que tiene como función de producción *Sobelow*.

### Versión de *Solow*

Dividiendo la ecuación fundamental entre $k_t$

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t} = sA + sB\frac{k_t^{\alpha}}{k_t} - (n+\delta)$$

$$\gamma_k = sA + sB\frac{k_t^{\alpha}}{k_t} - (n+\delta)$$

Como se puede apreciar en la ecuación de la tasa de crecimiento, donde la curva de depreciación parece descrita por, $n+\delta$ que representa una línea horizontal, en cambio la curva de ahorro es representada por una hipérbola.

Analizaremos que pasa si $k_t$ se acerca cada vez mas acero, entonces la curva de ahorro tiende al infinito por que el término $sBk_t^{\alpha-1}$, tiende al infinito, esto se puede verificar mediante la siguiente ecuación:

$$\underset{k\to 0}{Lím}\,\gamma_k = s.A + s.B\,\overset{(1/0)\,\approx\,\infty}{\frac{1}{k_t^{1-\alpha}}} - (n+\delta)$$

$$\underset{k\to 0}{Lím}\,\gamma_k = s.A + \infty - (n+\delta)$$

$$\underset{k \to 0}{Lím} \gamma_k = \infty$$

En cambio cuando $k_t$ aumenta cada vez mas hasta tender al infinito, la curva de ahorro se aproxima a $sA$, donde converge. En este caso podemos apreciar que cuando *t k* va al infinito la tasa de crecimiento que da expresada como la diferencia entre $sA$ y $n+\delta$, como se puede verificar mediante la siguiente ecuación:

$$(1/\infty) \approx 0$$

$$\underset{k \to 0}{Lím} \gamma_k = s.A + s.B \cancel{\frac{1}{k_t^{1-\alpha}}} - (n+\delta)$$

$$\underset{k \to 0}{Lím} \gamma_k = s.A + 0 - (n+\delta)$$

$$\underset{k \to 0}{Lím} \gamma_k = s.A - (n+\delta)$$

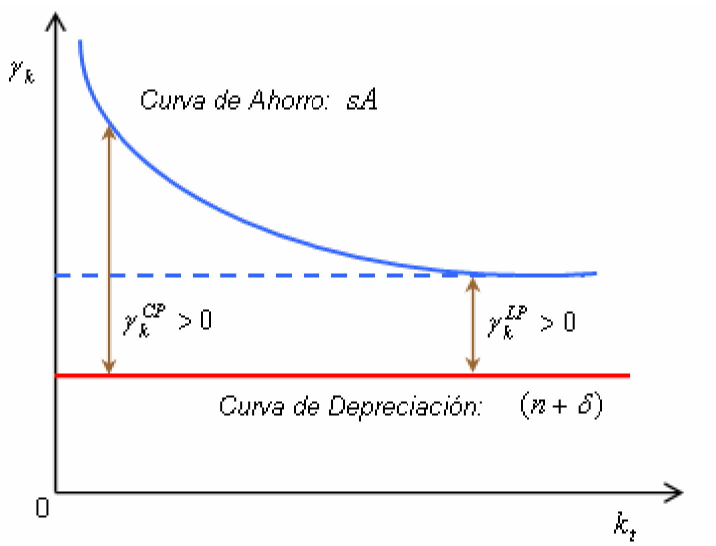
En esta parte analizaremos que el desenvolvimiento dinámico esta economía va depender del desenvolvimiento de sus componentes.

**Análisis**

**Caso I**

Un alto nivel de tecnología $(A)$ tal que la curva de ahorro supera a la curva depreciación $s.A > (n+\delta)$, como se puede apreciar en el gráfico [6.33]

**Gráfico [6.33]: Un alto nivel de tecnología**




**Características:**

La curva de ahorro es decreciente pero asintótica a $sA$.

La curva de ahorro supera a la curva de depreciación $s.A > (n+\delta)$.

La tasa de crecimiento por trabajador en el corto plazo es mayor que la tasa de crecimiento por trabajador de largo plazo $\gamma_k^{CP} > \gamma_k^{LP} > 0$.

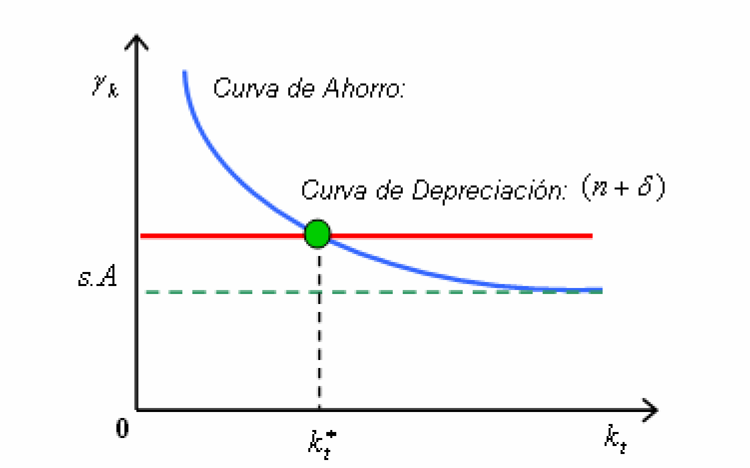
En el largo plazo no existe un crecimiento proporcionado, sino existe un crecimiento progresivo en donde $\gamma_k > 0$ entonces $s.A > (n+\delta)$, el capital por trabajador queda indeterminado.

Este caso es similar a los modelos de crecimiento AZ.

## CASO II

Un bajo nivel de tecnología ($A$), tal que la curva de ahorro se corta en un punto $s.A < (n+\delta)$ como se aprecia en el gráfico [6.34].

**Gráfico [6.34]: Un bajo nivel de tecnología**




### Características

La curva de ahorro es una curva decreciente pero asintótica a $s.A$.

En el largo plazo $s.A > (n+\delta)$.

En el largo plazo existe un estado proporcionado (la curva de ahorro y la curva de depreciación se intersecan) en un punto.

Si $\gamma_k > 0$ entonces $s.A \geq (n+\delta)$ se determina el capital por trabajador óptimo $k_t^*$.

Este caso se parece a los modelos Neoclásico de crecimiento.

## 6.13 Contabilidad de crecimiento o fuentes de crecimiento

En esta parte estudiaremos las fuentes que ayudan al crecimiento de la economía. Ya desde los clásicos ya habían formalizado las fuentes de crecimiento que son: La acumulación de capital, crecimiento de la fuerza de trabajo, crecimiento en el uso de recursos naturales y progreso tecnológico.

### Aporte de Solow

*Solow* (1957) va formalizar la contabilidad de crecimiento en su trabajo sobre cambio tecnológico en este trabajo supone una función Hicks-neutra; es decir, que el cambio tecnológico afecta de la misma manera tanto al capital como al trabajo y la función agregada de producción.

### 6.13.1 Supuestos del modelo

Sea una economía capitalista.

Esta economía no tiene relación con el exterior.

La economía es perfectamente competitiva en la que a cada factor productivo se le cancela el equivalente de su producto marginal.

La economía produce un solo bien.

El progreso tecnológico es neutral a lo Hicks-neutral.

Formula una función de producción dinámica.

### Función de Producción

El análisis comienza por presentarnos una función de producción dinámica que depende del stock de capital agregado, de la fuerza de trabajo y de los recursos naturales.

$$Y_t = F(K_t, L_t, N_t t)\ldots(FPA)$$

Donde

$Y_t$: Producto agregado en el instante "*t*".

$K_t$: Stock de capital agregado en el instante "*t*".

$L_t$: Fuerza de trabajo agregada en el instante "*t*".

$N_t$: Recursos naturales (RRNN) en el instante "*t*".

Aplicando el diferencial total a la función de producción

$$\underbrace{\frac{dY_t}{dt}}_{\dot{Y}_t} = \underbrace{\frac{dF(\circ)}{\partial K_t}\frac{\partial K_t}{dt}}_{F_K \dot{K}_t} + \underbrace{\frac{dF(\circ)}{\partial L_t}\frac{\partial L_t}{dt}}_{F_L \dot{L}_t} + \underbrace{\frac{dF(\circ)}{\partial N_t}\frac{\partial N_t}{dt}}_{F_N \dot{N}_t} + \underbrace{\frac{\partial F(\circ)}{\partial t}\frac{dt}{dt}}_{F_t}$$

Dividiendo a toda la ecuación entre $Y_t$

$$\frac{\dot{Y}_t}{Y_t} = \frac{F_K \dot{K}_t}{Y_t} + \frac{F_L \dot{L}_t}{Y_t} + \frac{F_N \dot{N}_t}{Y_t} + \frac{F_t}{Y_t}$$

Multiplicando los tres primeros términos del lado derecho de esta ecuación por K/K, L/L y N/N respectivamente, se obtiene

$$\underbrace{\frac{\dot{Y}_t}{Y_t}}_{g_Y} = \underbrace{\left(\frac{F_K K_t}{Y_t}\right)}_{\varepsilon_K^Y}\frac{\dot{K}_t}{K_t} + \underbrace{\left(\frac{F_L L_t}{Y_t}\right)}_{\varepsilon_L^Y}\frac{\dot{L}_t}{L_t} + \underbrace{\left(\frac{F_N N_t}{Y_t}\right)}_{\varepsilon_N^Y}\frac{\dot{N}_t}{N_t} + \underbrace{\frac{F_t}{Y_t}}_{m}\ldots(I)$$

$$g_Y = \varepsilon_K^Y.g_K + \varepsilon_L^Y.g_L + \varepsilon_N^Y.g_N + m\ldots(II)$$

Sea

$m$ : Tasa de progreso tecnológico.

$\varepsilon_K^Y$: Elasticidad del producto respecto al factor i-ésimo capital.

$\varepsilon_L^Y$: Elasticidad del producto respecto al factor i-ésimo capital trabajo.

$\varepsilon_N^Y$: Elasticidad del producto respecto al factor i-ésimo de recursos naturales.

Solow asume que el mercado de bienes y el mercado de factores son de competencia perfecta, cuya implicancia de este supuesto es:

$\varepsilon_K^Y = \alpha_K$ : Representa la participación de los beneficios en el ingreso nacional.

$\varepsilon_L^Y = \alpha_L$ : Representa la participación de los salarios en el ingreso nacional.

$\varepsilon_N^Y = \alpha_N$ : Representa la participación de la renta de los recursos naturales en el ingreso nacional.

El mercado de capital esta en competencia perfecta, por eso el producto marginal de capital es igual a la tasa de rendimiento bruto de capital.

$$F_K = PmgK = R$$

$$\varepsilon_K^Y = \frac{\partial Y_t}{\partial K_t}\frac{K_t}{Y_t} \Longrightarrow \varepsilon_K^Y = PmgK\frac{K_t}{Y_t} \Longrightarrow \varepsilon_K^Y = \frac{R.K_t}{Y_t} = \frac{B}{Y_t} = \alpha_K$$

El mercado de trabajo se encuentra en competencia perfecta, por eso el producto marginal del trabajo es igual al salario.

$$F_L = PmgL = w$$

$$\varepsilon_L^Y = \frac{\partial Y_t}{\partial L_t}\frac{L_t}{Y_t} \Longrightarrow \varepsilon_K^Y = PmgL\frac{L_t}{Y_t} \Longrightarrow \varepsilon_K^Y = \frac{wL_t}{Y_t} = \frac{W}{Y_t} = \alpha_L$$

El mercado de recursos naturales se encuentra en competencia perfecta, por eso el producto marginal de los recursos naturales en igual a la tasa de la renta de los recursos naturales.

$$F_N = PmgN = R$$

$$\varepsilon_N^Y = \frac{\partial Y_t}{\partial N_t}\frac{N_t}{Y_t} \Longrightarrow \varepsilon_N^Y = PmgN\frac{N_t}{Y_t} \Longrightarrow \varepsilon_N^Y = \frac{RL_t}{Y_t} = \alpha_N$$

Reemplazando la participación de los factores en la ecuación (II)

$$g_Y = \alpha_K.g_K + \alpha_L.g_L + \alpha_N.g_N + m\ldots(III)$$

Esta ecuación nos quiere decir que la tasa de crecimiento del producto agregado o PBI es igual a la suma de las tasas de crecimiento de los factores ponderados respectivamente por su participación en el ingreso nacional más la tasa de progreso tecnológico.

### Residuo de Solow

En consecuencia, esta tasa puede ser calculada por diferencia como se presenta en la ecuación (III).

$$m = g_Y - \left(\alpha_K.g_K + \alpha_L.g_L + \alpha_N.g_N\right)$$

La ecuación (III) nos permite estimar lo que en la literatura del crecimiento económico se conoce como el *residuo de Solow*. Que vendría hacer la diferencia entre el crecimiento del producto agregado menos la tasa de crecimiento de los factores ponderados por su participación.

Donde $m$, representa la tasa reprogreso tecnológico o *residuo de Solow*, que es hallando de forma indirecta ya que para calcular se utiliza estadísticas de las cuentas nacionales, es una tarea de gran envergadura tratar de estimar la tasa de crecimiento del factor tecnológico.

### 6.13.2 Contabilidad de crecimiento con una función *Cobb-Douglas*

Para esto asumiremos aparte de los supuestos básicos que el progreso tecnológico es Harrod-neutral.

$$Y_t = K_t^{\alpha}\left(BL_t\right)^{1-\alpha}\ldots(FPA)$$
$$s.a: \quad 0 < \alpha < 1$$

Donde

$Y_t$: Producto total (PBI)

$K_t$: Unidades de capital físico.

$L_t$: Unidades de trabajo.

$B$: Factor aumentativo de la eficiencia del trabajo.

$\alpha$ : Elasticidad del producto respecto al capital.

$1-\alpha$ : Elasticidad producto respecto a la fuerza de trabajo.

### Propiedades de la función de producción

$$F\left(K_t, L_t\right) = B^{1-\alpha} K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}$$

Si multiplicamos a la función por un $\lambda > 0$

$$F\left(\lambda K_t, \lambda L_t\right) = (\lambda K_t)^{\alpha} + B^{1-\alpha}(\lambda L_t)^{1-\alpha}$$
$$F\left(\lambda K_t, \lambda L_t\right) = \lambda.\left(B^{1-\alpha} K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}\right) = \lambda Y_t$$

La función presenta rendimientos constantes a escala

Los ratios (productos marginales del capital y trabajo) son constantes y positivos.

$$\frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = PmgK = \underbrace{\alpha}_{+} \underbrace{B^{1-\alpha} K_t^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha}}_{+} > 0$$

$$\frac{\partial Y_t}{\partial L_t} = PmgL = \underbrace{(1-\alpha)}_{+} \underbrace{B^{1-\alpha} K_t^{\alpha} L_t^{-\alpha}}_{+} > 0$$

Recordemos que $0 < \alpha < 1$ entonces $-\alpha > -1 \ldots +1 \Rightarrow 1-\alpha > 0$, es un valor positivo

La derivada de los productos marginales es decreciente y negativa.

$$\frac{\partial^2 Y_t}{\partial K_t^2} = \frac{\partial PmgK}{\partial K_t} = \underbrace{\alpha}_{+} \underbrace{(\alpha-1)}_{-} \underbrace{B^{1-\alpha} K_t^{\alpha-2} L_t^{1-\alpha}}_{+} < 0$$

Recordemos $0 < \alpha < 1$, entonces $0 < \alpha < 1 \ldots -1 \Rightarrow -1 < \alpha - 1 < 0$ es una constante negativa.

$$\frac{\partial^2 Y_t}{\partial L_{tt}^2} = \frac{\partial PmgL}{\partial L_t} = \underbrace{(-\alpha)}_{-} \underbrace{(1-\alpha)}_{+} \underbrace{B^{1-\alpha} K_t^{\alpha} L_t^{-(1+\alpha)}}_{+} > 0$$

Recordemos que $0 < \alpha < 1$, entonces $0 < \alpha < 1 \ldots x-1 \Rightarrow -1 < -\alpha < 0 \ldots +1$ es una constante positiva $0 < 1-\alpha < 1$.

Veremos que los límites requeridos por las condiciones de INADA se cumplen:

$$(1/\infty) \approx 0$$

$$\underset{K\to\infty}{Lím}\, PmgK = \alpha B^{1-\alpha} \frac{1}{K_t^{1-\alpha}} . L_t^{1-\alpha} = 0$$

$$(1/0) \approx \infty$$

$$\underset{K\to 0}{Lím}\, PmgK = \alpha B^{1-\alpha} \frac{1}{K_t^{1-\alpha}} . L_t^{1-\alpha} = \infty$$

$$(1/\infty) \approx 0$$

$$\underset{L\to\infty}{Lím}\, PmgL = (1-\alpha) B^{1-\alpha} K_t^{\alpha} \frac{1}{L_t^{\alpha}} = 0$$

$$(1/0) \approx \infty$$

$$\underset{L\to 0}{Lím}\, PmgL = (1-\alpha) B^{1-\alpha} K_t^{\alpha} \frac{1}{L_t^{\alpha}} = \infty$$

Aplicando logaritmo a la función de producción agregada y derivado con respecto al tiempo

$$Ln(Y_t) = \alpha Ln(K_t) + (1-\alpha) LnB_t + (1-\alpha) LnL_t$$

$$\underbrace{\frac{dLn(Y_t)}{dt}}_{g_Y} = \alpha \underbrace{\frac{dLn(K_t)}{dt}}_{g_K} + (1-\alpha) \underbrace{\frac{dLnB_t}{dt}}_{g_B} + (1-\alpha) \underbrace{\frac{dLnL_t}{dt}}_{g_L}$$

$$g_Y \quad = \quad \alpha . g_K \quad + \quad (1-\alpha) g_B \quad + \quad (1-\alpha) g_L \ldots (\varpi)$$

Donde

$g_B$ : Tasa de progreso tecnológico debido a la eficiencia del trabajo.

$\alpha = \varepsilon_K^Y = \alpha_K$ : Elasticidad del producto respecto al capital.

$(1-\alpha) = \varepsilon_L^Y = \alpha_L$ : Elasticidad del producto respecto al trabajo.

Esta ecuación nos quiere decir que el crecimiento del PBI agregado es igual a la suma del crecimiento del capital multiplicado por su participación en el PBI $\alpha . g_K$, el crecimiento tecnológico multiplicado por su participación en el PBI $(1-\alpha)g_B$ y la tasa de crecimiento del trabajo multiplicado por su participación en el PBI $(1-\alpha)g_L$.

Despejando $g_B$ de la ecuación ($\varpi$ )

$$g_B = \frac{g_Y - (\alpha_K g_K + \alpha_L g_L)}{\alpha_L} = \frac{residuo\_de\_Solow}{\alpha_L}$$

Esta ecuación nos quiere decir que la tasa de progreso tecnológico es igual a la diferencia o residuo entre el crecimiento observado del PBI y el crecimiento ponderado de los factores directamente observables dividido entre la elasticidad producto respecto al trabajo.

Como no interesa expresar la tasa de crecimiento del PBI por trabajador (per cápita) reemplazaremos las tasas agregadas por sus equivalentes.

Sabemos que el PBI por trabajador es igual al PBI agregado dividido por el número de trabajadores.

$$y_t = \frac{Y_t}{L_t} \quad \Rightarrow \quad Ln(y_t) = Ln(Y_t) - Ln(L_t)$$

$$\frac{dLn(y_t)}{dt} = \frac{dLn(Y_t)}{dt} - \frac{dLn(L_t)}{dt}$$

$$\frac{\dot{y}_t}{y_t} = \frac{\dot{Y}_t}{Y_t} - \frac{\dot{L}_t}{L_t} \quad \Rightarrow \quad g_y = g_Y - g_L \quad \Rightarrow \quad g_Y = g_y + g_L \ldots (IV)$$

Sabemos que el capital por trabajadores igual al PBI agregado dividido por el numero de trabajadores

$$k_t = \frac{K_t}{L_t} \quad \Rightarrow \quad Ln(y_t) = Ln(K_t) - Ln(L_t)$$

$$\frac{dLn(y_t)}{dt} = \frac{dLn(K_t)}{dt} - \frac{dLn(L_t)}{dt}$$

$$\frac{\dot{y}_t}{y_t} = \frac{\dot{K}_t}{K_t} - \frac{\dot{L}_t}{L_t} \quad \Rightarrow \quad g_y = g_K - g_L \quad \Rightarrow \quad g_K = g_y + g_L \ldots (V)$$

Reemplazando (IV) y (V) en la ecuación ($\varpi$ )

$$g_y + g_L = \alpha(g_k + g_L) + (1-\alpha)g_B + (1-\alpha)g_L$$

$$g_y = (1-\alpha)g_B + \alpha g_k \ldots (VI)$$

La ecuación (VI) nos quiere decir que la tasa de crecimiento del PBI por trabajador se puede descomponer entre la contribución del progreso tecnológico y la tasa de crecimiento del capital por trabajador, de hay que ha esta descomposición se le lama contabilidad de crecimiento.

### 6.13.3 Ejercicios resueltos

**Problema Nº1**

En el año 2008 se sabe que un país tiene una tasa de crecimiento del PBI per cápita que es 4%, la tasa de crecimiento del capital agregado fue 2%, la tasa de crecimiento de las horas de trabajo per cápita fue del -1% y la tasa de crecimiento de la población fue 1.5%. La participación de capital en el PBI era de 45% ¿Cuál fue la tasa de crecimiento de la productividad agregada?

**Rpt**

De la función: $\frac{dLn(y_t)}{dt} = (1-\alpha)\frac{dLn(B)}{dt} + \alpha\frac{dLn(k_t)}{dt} + (1-\alpha)\frac{dLn(l_t)}{dt}$

$$g_y = (1-\alpha)g_B + \alpha g_k + (1-\alpha)g_l$$

Datos: $g_y = 0.04$ $\quad g_K = 0.02$ $\quad g_l = -0.01$ $\quad g_K = 0.015$ $\quad \alpha = 0.45$

Sabemos: $g_k = g_K - g_N = 0.02 - 0.015 = 0.005$

$$g_B = \frac{g_y - \alpha g_k - (1-\alpha)g_l}{(1-\alpha)} = \frac{0.04 - 0.45x0.005 - 0.55(-0.01)}{0.55}$$

$$g_B = 0.0786 \approx 7.86\%$$

**Problema Nº2**

Se sabe que un país "Z" tiene una tasa de crecimiento del PBI 5%, la tasa de crecimiento del capital por trabajador es 1.5% la tasa de crecimiento de las horas de trabajo fue de -1%, la tasa de crecimiento de la población per cápita fue del 1% y la participación del capital en el PBI era del 30%. ¿Cual fue la tasa de crecimiento de la productividad agregada?

**Rpt**

De la función: $\frac{dLn(y_t)}{dt} = (1-\alpha)\frac{dLn(B)}{dt} + \alpha\frac{dLn(k_t)}{dt} + (1-\alpha)\frac{dLn(l_t)}{dt}$

$$g_y = (1-\alpha)g_B + \alpha g_k + (1-\alpha)g_l$$

Datos: $g_Y = 0.05$ $\quad g_k = 0.01$ $\quad g_L = 0.015$ $\quad g_N = 0.01$ $\quad \alpha = 0.30$

Sabemos: $g_k + g_N = g_K = 0.01 + 0.01 = 0.02$

$$g_B = \frac{g_y - \alpha g_k - (1-\alpha)g_l}{(1-\alpha)} = \frac{0.05 - 0.30x0.02 - 0.70(-0.015)}{0.70}$$

$$g_B = 0.0778 \approx 7.78\%$$

Ejercicios de Crecimiento Económico

# Capítulo VII

## Crecimiento Económico en la periferia

"*Mirar al futuro, y yo quiero mirar al pasado sin dejar, pero sin dejar de ver el futuro*"

Orwell (1984) Citado

Por: Perú 21 (www.peru21.pe)

martes 17 de marzo de 2009, pág.: 19

## 7.1 Modelo de *Lewis*

El economista británico, nacido en Santa Lucía, en las Antillas, obtuvo el Premio Nobel de Economía en 1979, compartido con *Theodore W. Schultz*, por su investigación pionera en el desarrollo económico con atención particular a los problemas de los países en desarrollo.

Lewis en su trabajo "El desarrollo económico con oferta ilimitada de factores" (1954), va analizar el desarrollo económico para países subdesarrollados. En este trabajo pionero plantea las economías duales son aquella economías que tiene dos sectores y están vinculadas entre si.

Modelo de Lewis, para incorporar la posibilidad de dualismos en la economía. Si bien no es evidente que ello se verifique para todas las regiones del mundo, él destaca la existencia de países donde la población es cuantiosa respecto al capital y los recursos naturales, por lo que hay sectores en la economía (sector de subsistencia) en donde "la productividad marginal del trabajo es despreciable, nula o negativa"

### 7.1.1 Supuestos del modelo

- ✍ Sea un país subdesarrollado con economía dual.
- ✍ Esta economía tiene dos sectores:
  - Sector capitalista.
  - Sector de subsistencia.
- ✍ Existe una oferta ilimitada de mano de obra.
- ✍ En el sector de capitalista existe un salario de subsistencia.
- ✍ En el sector de subsistencia existe un promedio menor que el salario de subsistencia.
- ✍ Esta economía no tiene relación con el exterior.
- ✍ La economía produce un solo bien el mismo que se consume e invierte.

### Sector capitalista

Este sector utiliza capital.

Utiliza tecnología moderna.

Contrata mano de obra asalariada.

Tiene una relación producto capital.

Demanda de trabajo del sector capitalista esta representado por:

$$M = AK^{\alpha}(L_M)^{1-\alpha} \ldots (I)$$

### Sector de subsistencia

Este sector no utiliza capital.

Utiliza tecnología tradicional.

No utiliza mano de obra capitalista.

Usa mano de obra familiar (trabajo familiar).

Existe una relación producto no capitalista.

Demanda de trabajo del sector de subsistencia esta representado por:

$$S = w_S L_S \ldots (II)$$

Donde

$M$ : Representa al sector capitalista.

$S$ : Representa al sector de subsistencia (no capitalista).

$L_M$ : Empleo del sector capitalista.

$L_S$ Empleo del sector de subsistencia.

$w_S$ : Producto por trabajador en el sector de subsistencia

### 7.1.2 Mercado de trabajo y distribución del ingreso

Si suponemos que el mercado de trabajo es competitivo, el salario estará establecido por lo que los individuos pueden ganar fuera del sector: el salario en $M$ está determinado por lo que se gana en $S$ más un adicional para atraer individuos al sector. Asimismo, el empleo en el sector capitalista es fijado por las condiciones usuales de maximización de beneficios, de modo que la demanda de trabajo en $M$ es:

$$L_M = \left[ (1-\alpha) \frac{A}{w_M} \right]^{\frac{1}{\alpha}} K \ldots (III)$$

$$w_M = f.w_S \ldots (IV)$$

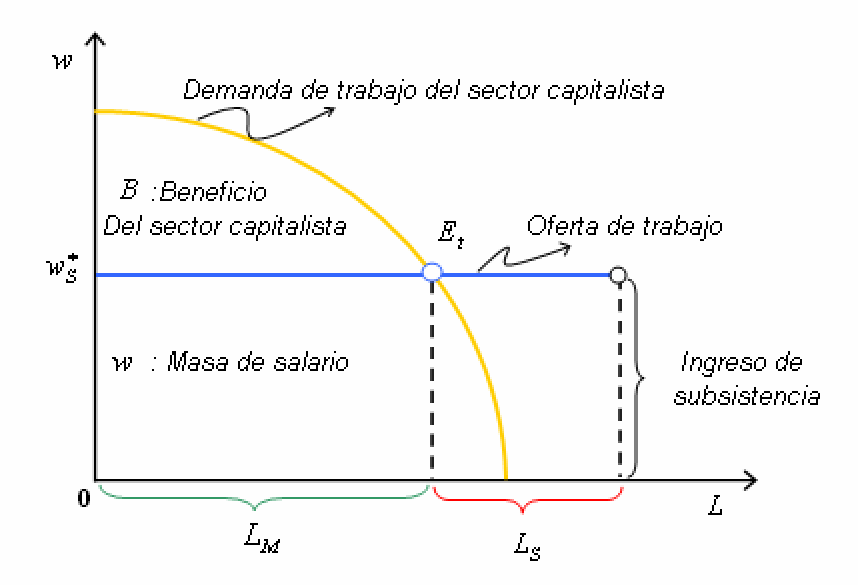
Donde

$w_M$ : Productividad del sector de capitalista.

$K$: El punto de inflexión entre una economía con excedente de trabajo y una economía madura, en el cual todo el excedente ha sido absorbido al salario de subsistencia más el adiciona

Disponiendo de trabajo ilimitado y capital escaso, este último se empleará en el sector capitalista hasta que la productividad marginal del trabajo iguale al salario. Este salario, estará determinado por lo que pueda ganarse fuera del sector. De modo que los ingresos en el sector de subsistencia imponen un mínimo para los salarios del sector capitalista, y más aún, deberán ser un tanto mayor para tentar a los trabajadores a que abandonen su empleo y se trasladen al sector capitalista.

**Gráfico [7.1]: Coexistencia de los dos sectores en la economía se caracteriza por la escasez de capital y la oferta de trabajo abundante**




En el corto plazo, mientras cohabitan los dos sectores en la economía, el salario de equilibrio $w_M$ es independiente de $K$ y está determinado sin más por el salario del sector $S$ y el adicional. El equilibrio de corto plazo es el segmento horizontal de la curva w como se muestra El gráfico [7.1]. De este modo, cambios en el ratio capital-trabajo provocarán variaciones en el empleo del sector capitalista pero no alterarán el salario real.

Cuando el sector de subsistencia desaparece $(\mathrm{PMG}_{LS} \geq 0)$, la economía se deviene en "*madura*" (una economía de un sector). La ecuación de la curva de w se deriva ahora de la condición de vaciamiento del mercado y la oferta total de trabajo es igual a la demanda del sector capitalista $(L = L_M)$. Supliendo esta condición en la ecuación (III) y resolviendo para $w_M$, obtenemos:

$$w_M = A(1-\alpha)K^{\alpha} \ldots (V)$$

Para una economía madura, la curva w tiene pendiente positiva igual a $\alpha$ en el espacio como en el modelo de Solow, siendo $K$ el punto de inflexión entre una economía con excedente de trabajo y una economía madura, en el cual todo el excedente ha sido absorbido al salario de subsistencia más el adicional, y cuyo valor puede obtenerse resolviendo la ecuación (III) para, $K$ con $w_M = f.w_S$ y $L_M = L$.

$$k = \left[\frac{f.w_S A}{(1-\alpha)}\right]^{\frac{1}{\alpha}} \ldots (VI)$$

Punto en el que el pleno empleo coincide con el producto medio del trabajo en el sector de subsistencia.

En el largo plazo, Lewis adopta el punto de vista clásico en el que el ahorro de los trabajadores es despreciable, siendo los capitalistas los únicos que contribuyen al ahorro nacional, y por simplicidad, supone que ahorran sus beneficios completamente. Como en todo modelo Clásico no se distingue entre ahorro e inversión. De modo que el beneficio en el período n determina el stock de capital en el período n + 1. La tasa de acumulación del capital es entonces

$$\frac{I}{K} = S_{\pi}.r - \delta$$

Donde
$S_{\pi}$ : Es la tasa de ahorro.
$r$ : Representa el beneficio.
$\delta$ : Es la tasa de depreciación.

Si obviamos el progreso técnico, la tasa de crecimiento de la economía es igual a la tasa de crecimiento de la fuerza de trabajo ($n$), y la condición de *steady state* será $s_{\pi}.r - \delta = n$.

La tasa de beneficio como función del salario se expresa de la siguiente manera:

$$r = \alpha A^{\frac{1}{\alpha}}\left[\frac{(1-\alpha)}{w}\right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \ldots (VIII)$$

Sustituyendo esta ecuación de beneficio-salario en la condición de steady state, y resolviendo para $w_M$, obtenemos el salario real requerido para satisfacer la condición de equilibrio ($w_M{}^*$)

$$w_M^* = (1-\alpha)A^{\frac{1}{1-\alpha}}\left[\frac{\alpha s_{\pi}}{n+\delta}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \ldots (IX)$$

Que al igual que en el modelo de *Solow*, es un segmento horizontal en el espacio como se aprecia en el gráfico [7.1].

Recapitulando, el modelo indica que dada una oferta ilimitada de trabajo (producto del desempleo encubierto existente en el sector de subsistencia), un salario real constante y si los beneficios del sector capitalista se reinvierten, aumentando la capacidad productiva; el excedente capitalista, y por ende la formación de capital, aumentarán en relación con la renta nacional. Asimismo, al tiempo que el stock de capital se acrecienta, aumenta el beneficio y, mientras el salario se mantenga constante, el crecimiento se prolonga hasta que el sector industrial absorbe al de subsistencia.

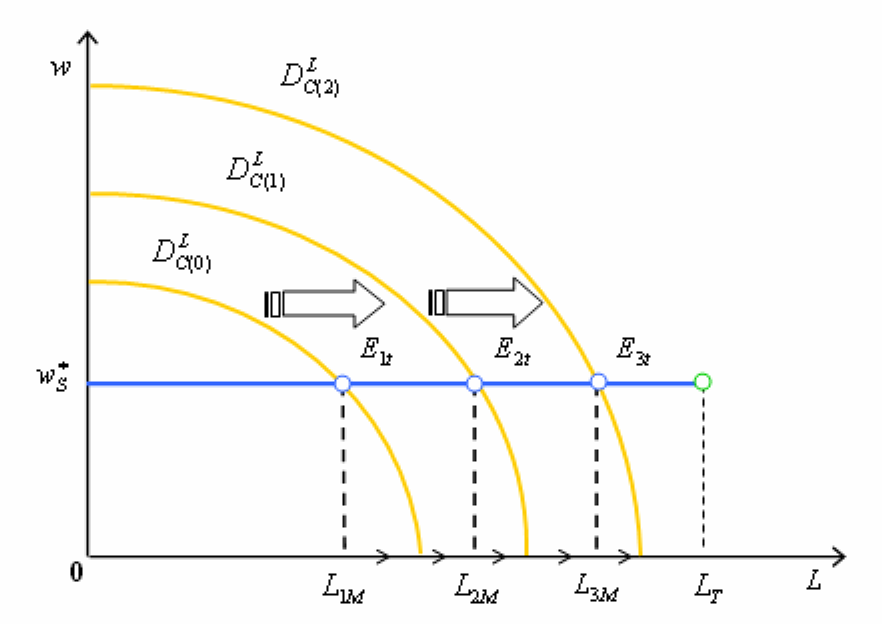
### 7.1.3 Acumulación de capital

Nos dice que va darse un incremento del capital años tras año (compra de equipos, remodelación de la planta, construcción de plantas industriales, etc.) aumenta el producto de la economía y esto hacer que se expanda la demanda de trabajo. Esta expansión hace que el sector capitalista absorba al sector no capitalista como se aprecia en el gráfico [7.2], donde la demanda de trabajo se expande de $D^L_{C(0)}$, $D^L_{C(1)}$ hasta $D^L_{C(2)}$.

Donde
$D^L_C$ : Demanda de trabajo del sector capitalista.
$L_M$ : Empleo del sector capitalista.
$L_T$ : Empleo total.

Como él expresara, el proceso de traslado de mano de obra hace que, a priori, las empresas se respalden en la existencia de mano de obra barata para aumentar su producción y la acumulación de capital. En este trabajo se planteó un modelo formal, concediendo a los capitalistas una racionalidad limitada. Se supuso que los empresarios del sector moderno resolverían sus decisiones de producción (e inversión) conforme a sus expectativas, las que estribarían en la proporción de ganancia derivada y otras señales en la economía.

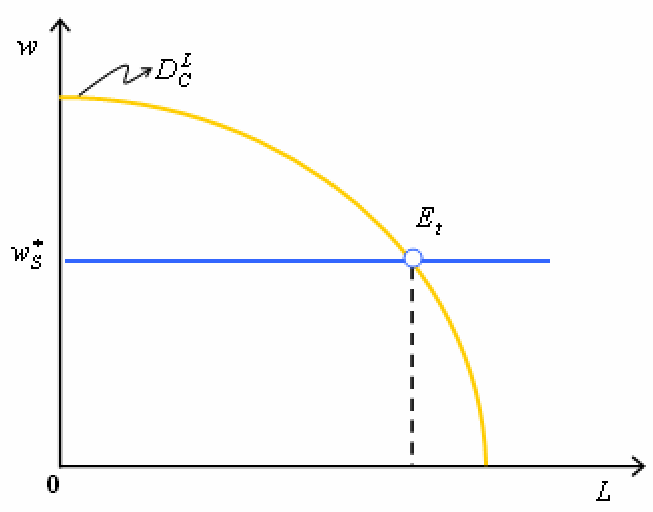
**Gráfico [7.2]: Acumulación de capital de capital**




### 7.1.4 Concepto de desarrollo

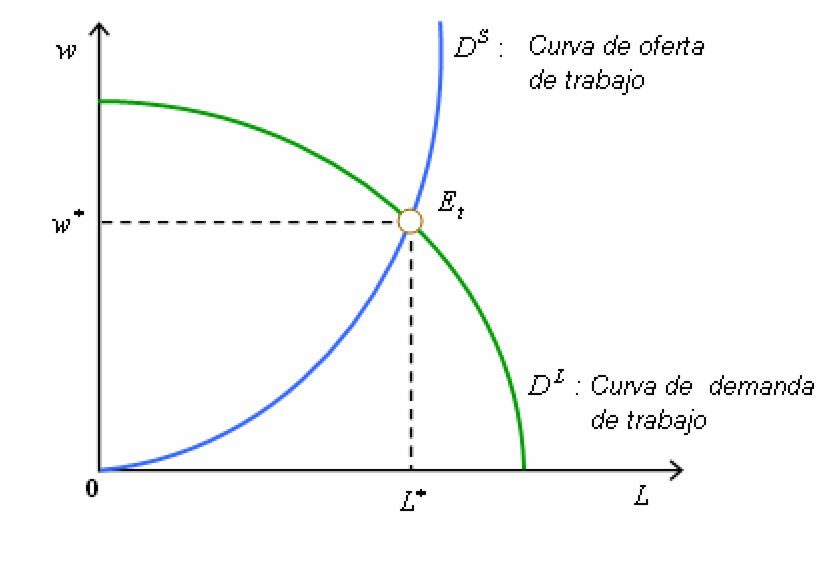
Para *Lewis* considera el  desarrollo económico, como un proceso de desarrollo capitalista, nos dice que esto se consigue desarrollando todas las medidas para que se expanda el sector capitalista y se absorba al sector no capitalista  y un ejemplo de estos es: Alemania, Japón Inglaterra, etc. En el gráfico [7.3] y [7.4] se puede apreciar la concepción del desarrollo  que menciona *Lewis* al comparar un país subdesarrollado y un país desarrollado

**Gráfico [7.3]: Un país subdesarrollado**



Podemos apreciar que en el gráfico [7.3] una mano de obra ilimitada (oferta de trabajo ilimitada) a un mismo salario, que es el salario de subsistencia. En comparación con el gráfico [7.4] donde se aprecia una oferta de trabajo decreciente y que no existe un salario único, sino que este se va ajustando con la oferta y demanda de trabajo del país capitalista.

**Gráfico [7.4]: Un país desarrollado**




### 7.1.5 Critica del modelo

El modelo de Lewis ha estado sujeto a críticas desde diversas perspectivas. Entre ellas hallamos el bien conocido modelo de Harris-Todaro (1970) que supone una economía dual similar a la de Lewis, pero donde la decisión del trabajador de localizarse en el sector urbano o el rural está explícitamente fundada en la maximización de las ganancias esperadas. El modelo de Harris y Todaro podría ensimismarse con una transformación de corto plazo del proceso de Lewis; que hecha luces en el funcionamiento de los mercados de trabajo, migración, y las consecuencias de las políticas de empleo urbanas. Sin embargo, aquí nos planteamos otro tipo de interrogante, a saber: ¿Si se concede a los capitalistas una racionalidad limitada, el proceso de Lewis podría estancarse antes de lograr su objetivo?

El espíritu del modelo de Lewis es clásico por naturaleza, aunque es bastante evidente que en su ensayo estaba muy comprometido con las motivaciones de los agentes individuales. A este respecto, por consiguiente, él estaba neoclásicamente inclinado[3]. Con referencia a los capitalistas, supone que aumentan al máximo sus ganancias. Pero mientras que el objetivo de maximización de ganancias está felizmente definido en un contexto estático, puede ser bastante ambiguo en un modelo dinámico como éste. Queda claro entonces que, según el supuesto que Lewis hace, en cada período de tiempo el capitalista elige su consumo de trabajo de modo tal, que el producto marginal del trabajo iguale al salario. Francamente, este supuesto no nos dice cuánto invierte el capitalista porque ésta es una decisión intertemporal. Esto es, en lugar de suponer solo una función objetivo para el capitalista y derivar diversas reglas de comportamiento de ella, Lewis comienza suponiendo dos reglas del comportamiento. Esto en sí mismo no es inaceptable, pero es importante verificar las implicancias de tales supuestos.

La conclusión general de este análisis, revelaría que, empezando con una economía dual primitiva, es plausible que las fuerzas sobre las que Lewis escribió estén presentes y muevan la economía en la dirección que sugirió. Aunque tampoco es tan inexorable que el proceso traslade a una economía atrasada a un estado "desarrollado". Es probable también, que el propio proceso genere fuerzas que lleven al estancamiento antes de que semejante estado feliz surja. La experiencia de países subdesarrollados no parece contradecir esta perspectiva.[55]

## *7.2 Modelo de Solow con economía abierta*

En este modelo se va ser un extensión del modelo va revidado en Capítulo II (2.5 y 2.6) de este libro. En este parte consideraremos que la economía tiene relación con el exterior (economía abierta).

### 7.2.1 Supuestos del modelo

A los supuestos básicos del modelo de Solow se agregan los siguientes supuestos particulares:

Sea una economía capitalista que tiene relación con el exterior.

Sea una economía pequeña.

El comercio exterior es solo de bienes.

La importación es una proporción del producto agregado dado el producto margina a importar ($Pmg(M)$).

Las exportaciones son dadas.

Siendo el sistema cambiario fijo.

Sea el tipo de cambio la unidad.

Sea la función de producción *Cobb-Douglas*.

Como hemos venido desarrollando a lo largo de este texto halaremos la función de producción intensiva. Dividiendo la función de producción que esta sujeta a , entre el número de trabajadores, tenemos:

$$\frac{Y_t}{L_t} = A\frac{K_t^{\alpha}}{L_t^{\alpha}}\frac{L_t^{\beta}}{L_t^{\beta}} \quad \Rightarrow \quad y_t = Ak_t^{\alpha} \ldots (FPI)$$

Recordemos que la inversión por trabajador que ya ha sido demostrada en páginas anteriores de este texto en igual a:

$$\frac{I^b}{L_t} = \dot{k}_t + (n+\delta)k_t$$

**Ecuación Fundamental**

De la condición macroeconómica

$$S + M = I^b + X$$
$$s.Y_t + m.Y_t = I^b + \overline{X}$$

Donde

$\overline{\chi}$ : Razón de las exportaciones dado el PBI

[55] Este fragmento sea extraído del artículo Martín Schrod (2005) “El modelo de Lewis: Dualismos y endeudamiento a la luz del análisis no lineal”. Pág.: 7-10



Ejercicios de Crecimiento Económico

$$\overline{X} = \frac{\overline{X}}{Y_t} Y_t \Rightarrow \overline{X} = \overline{\chi}.Y_t \Rightarrow \overline{\chi} = \frac{\overline{X}}{Y_t}$$

$$s.Y_t + m.Y_t = I^b + \overline{\chi}.Y_t \quad \Rightarrow \quad s.Y_t + m.Y_t - \overline{\chi}.Y_t = I^b$$

$$\left(s + m - \overline{\chi}.\right)Y_t = I^b$$

Dividiendo la ecuación anterior entre el numero de trabajadores de la economía

$$\left(s + m - \overline{\chi}.\right)\frac{Y_t}{L_t} = \frac{I^b}{L_t} \quad \Rightarrow \quad \left(s + m - \overline{\chi}.\right)y_t = \dot{k}_t + (n + \delta)k_t \ldots (\psi)$$

Resolviendo para $\dot{k}_t$ de la ecuación ($\psi$)

$$\dot{k}_t = \left(s + m - \overline{\chi}.\right)y_t - (n + \delta)k_t$$

$\dot{k}_t = \left(s + m - \overline{\chi}.\right)Ak_t^{\alpha} - (n + \delta)k_t$, la ecuación de *Solow* – *Swan* con economía abierta

### 7.2.2 Estado de crecimiento proporcionado

En el estado de crecimiento proporcionado $\dot{k}_t$ es nula esto implica que se determina el capital por trabajador.

Si $\dot{k}_t = 0$ entonces $\left(s + m - \overline{\chi}.\right)Ak_t^{\alpha} = (n + \delta)k_t$, se determina el capital por trabajador óptimo de esta economía.

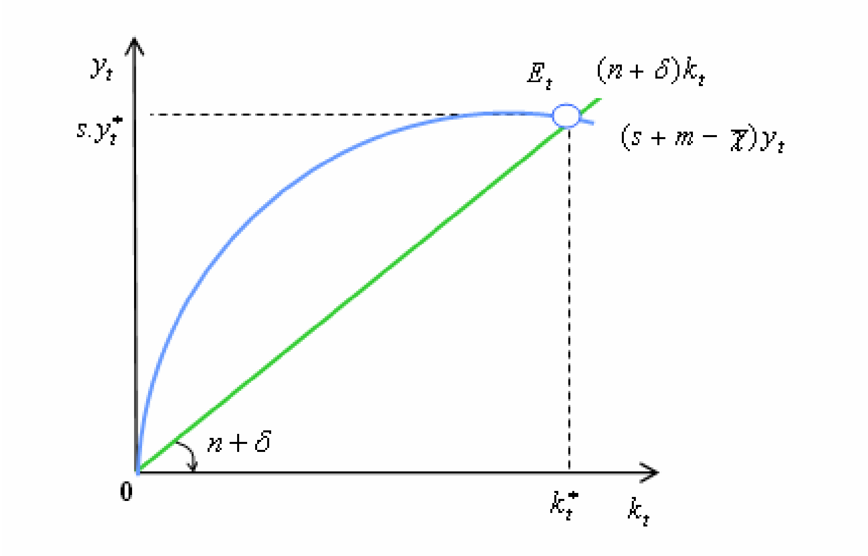
$$\frac{\left(s + m - \overline{\chi}\right)A}{n + \delta} = \frac{k_t}{k_t^{\alpha}} \quad \Rightarrow \quad k_t^* = \left(\frac{(s + m - \overline{\chi})A}{n + \delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Reemplazando el capital óptimo en la función de producción intensiva se determina la producción por trabajador de la economía

$$y_t = A\left(\left(\frac{(s + m - \overline{\chi})}{n + \delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} A\right)^{\alpha} \quad \Rightarrow \quad y_t^* = A\left(\frac{(s + m - \overline{\chi})A}{n + \delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

En el gráfico [7.5] se puede apreciar la forma del la curva de ahorro por trabajador y de la curva ampliada bruta por trabajado, como los nueva variable.

**Gráfico [7.5]: Función de producción en una economía abierta**




**Versión de Barro**

Para hallar la versión de Barro solo vasta dividir a la ecuación fundamental entre el capital por trabajador.

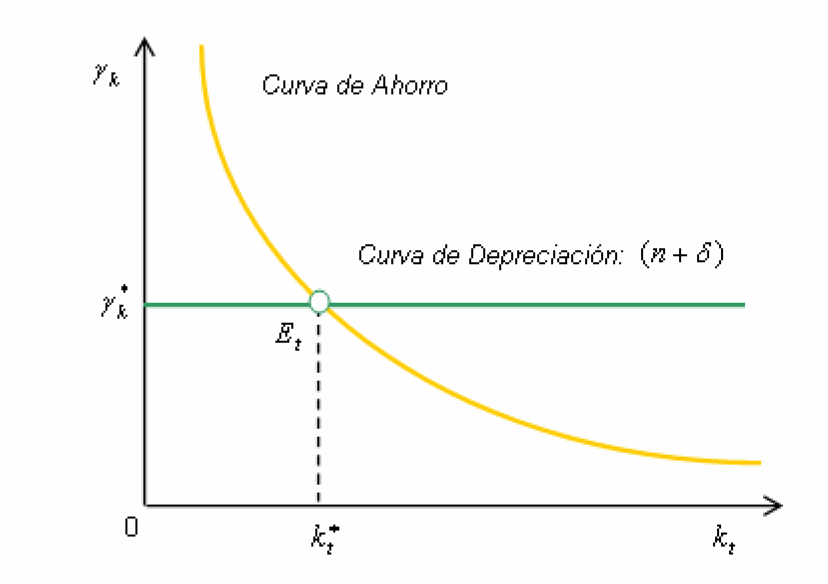
$$\frac{\dot{k}_t}{k_t} = (s+m-\overline{\chi}.)A\frac{k_t^{\alpha}}{k_t} - (n+\delta)$$

En el estado de crecimiento proporcionado $\gamma_k$ es nula.

Si $\gamma_k = 0$ entonces la curva de ahorro se intercepta con la curva de depreciación y determina el capital por trabajador de la economía como se puede apreciar en el gráfico [7.6].

$$\gamma_k = (s+m-\overline{\chi}.)A\frac{k_t^{\alpha}}{k_t} - (n+\delta)$$

**Gráfico [7.4]: Determinación del capital por trabajador**



## *7.3 Modelo de crecimiento con factor tierra*

Este modelo ya era planteado de la época de Malthus en su libro sobre la población donde plantea las hipótesis que hoy son llamadas "*Hipótesis de Malthus*", en ella nos dice que la población crece en forma geométrica, mientras los alimentos lo hacen en forma aritmética.

La implicancia de esta hipótesis es que al crecer la población en forma geométrica esto generara una escasez de alimento aumentando la brecha entre el crecimiento de la población y la producción de alimentos, por ende se ocasionara en el mundo hambruna, aumento de la pobreza, guerras por los alimentos, etc.

Pero en la revolución industrial se demostró que esta hipótesis no era valida, por que la producción supero los rendimientos decrecientes.

Para comenzar a desarrollar el modelo mencionaremos que es una extensión de modelo de *Solow* ya estudiado en páginas anteriores de este libro, solo al modelo mencionado se le añade implícitamente el factor tierra.

### 7.3.1 Supuestos del modelo

A los supuestos básicos del modelo de *Solow* se le añaden los siguientes supuestos particulares:

Existe una función de producción que coincide con el factor tierra.

La tierra es de oferta fija.

### Función de producción agregada

Se plantea la siguiente función:

$$Y_t = B_t K_t^{\alpha} T^{\beta} L_t^{1-\alpha-\beta} \ldots (FPA)$$

$$s.a: \begin{cases} 0 < \alpha < 1 \\ 0 < \beta < 1 \end{cases}$$

Donde

$T$ : Stock de tierra agregado fijo.

$K_t$ : Stock de capital agregado.

$L_t$ : Fuerza de trabajo agregada.

$Y_t$ : Producción agregada.

$\alpha$ : Elasticidad producto respecto al capital.

$\beta$ : Elasticidad del producto respecto a la tierra.

$B_t$ : Índice del nivel de tecnología.

$$B_{(t)} = B_0 e^{m_L . t}$$

Con las propiedades

Si $t = 0$ entonces $B_{(t=0)} = 1$

Si $t > 1$ entonces $B_{(t)} > 1 \;\; \Rightarrow \quad \dot{B}_{(t)} > 0$

**Propiedades de la función de producción**

$$F(K_t, T, L_t) = BK_t^{\alpha} T^{\beta} L_t^{1-\alpha-\beta}$$

Si multiplicamos a la función por un $\lambda > 0$

$$F(\lambda K_t, \lambda T, \lambda L_t) = B(\lambda K_t)^{\alpha} (\lambda T)^{\beta} (\lambda L_t)^{1-\alpha-\beta}$$

$$F(\lambda K_t, \lambda T, \lambda L_t) = \lambda.\left(BK_t^{\alpha} T^{\beta} L_t^{1-\alpha-\beta}\right) = \lambda Y_t$$

La función presenta rendimientos de escala constante

Los productos marginales del capital y trabajo son positivos.

$$\frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = PmgK = \underbrace{\alpha}_{+}\underbrace{BK_t^{\alpha-1}T^{\beta}L_t^{1-\alpha-\beta}}_{+} > 0$$

$$\frac{\partial Y_t}{\partial T} = PmgT = \underbrace{\beta}_{+}\underbrace{BK_t^{\alpha}T^{\beta-1}L_t^{1-\alpha-\beta}}_{+} > 0$$

$$\frac{\partial Y_t}{\partial L_t} = PmgL = \underbrace{(1-\alpha-\beta)}_{+}\underbrace{BK_t^{\alpha}T^{\beta}}_{+}L_t^{-(\alpha+\beta)} > 0$$

Sabemos que $0 < \alpha < 1 \wedge 0 < \beta < 1$, si sumamos estas dos desigualdades obtenemos $0 < \alpha + \beta < 2 \ldots x - 1 \quad \Rightarrow \quad 0 > -(\alpha + \beta) > -2 \ldots +1 \quad \Rightarrow \quad 1 > 1 - (\alpha + \beta) > -1$, para nuestros fines tomaremos los valores positivos de esta desigualdad.

La derivada de los productos marginales on crecientes y negativos

$$\frac{\partial^2 Y_t}{\partial K_t^2} = \frac{\partial PmgK}{\partial K_t} = \underbrace{\alpha}_{+}\underbrace{(\alpha-1)}_{-}\underbrace{BK_t^{\alpha-2}T^{\beta}L_t^{1-\alpha-\beta}}_{+} < 0$$

Recordemos $0 < \alpha < 1$, entonces $0 < \alpha < 1 \ldots -1 \Rightarrow -1 < \alpha - 1 < 0$ es una constante negativa.

$$\frac{\partial^2 Y_t}{\partial T^2} = \frac{\partial PmgT}{\partial T} = \underbrace{\beta}_{+}\underbrace{(\beta-1)}_{-}\underbrace{BK_t^{\alpha}T^{\beta-2}L_t^{1-\alpha-\beta}}_{+} < 0$$

Recordemos $0 < \beta < 1$, entonces $0 < \beta < 1 \ldots -1 \Rightarrow -1 < \beta - 1 < 0$ es una constante negativa.

$$\frac{\partial^2 Y_t}{\partial L_{tt}^2} = \frac{\partial PmgL}{\partial L_t} = \underbrace{-(\alpha+\beta)}_{-}\underbrace{(1-\alpha-\beta)}_{+}\underbrace{BK_t^{\alpha}T^{\beta}L_t^{-(1+\alpha+\beta)}}_{+} < 0$$

Veremos que los límites requeridos por las condiciones de INADA se cumplen:

$$(1/\infty) \approx 0$$

$$\underset{K\to\infty}{Lím}\, PmgK = \alpha B \cancel{\frac{1}{K_t^{1-\alpha}}}.T^{\beta} L_t^{1-\alpha-\beta} = 0$$

$$(1/0) \approx \infty$$

$$\underset{K\to 0}{Lím}\, PmgK = \alpha B \cancel{\frac{1}{K_t^{1-\alpha}}}.\kappa_t^{\eta} L_t^{1-\alpha} = \infty$$

$$(1/\infty) \approx 0$$

$$\underset{K\to\infty}{Lím}\, PmgT = \beta .BK^{\alpha} \cancel{\frac{1}{T^{1-\beta}}} L_t^{1-\alpha-\beta} = 0$$

$$(1/0) \approx \infty$$

$$\underset{K\to 0}{Lím}\, PmgK = \alpha BK_t^{\alpha} \cancel{\frac{1}{T^{1-\beta}}} L_t^{1-\alpha-\beta} = \infty$$

$$(1/\infty) \approx 0$$

$$\underset{L\to\infty}{Lím}\, PmgL = (1-\alpha-\beta)BK_t^{\alpha}T^{\beta} \cancel{\frac{1}{L_t^{\alpha+\beta}}} = 0$$

$$(1/0) \approx \infty$$

$$\underset{L\to 0}{Lím}\, PmgL = (1-\alpha-\beta)BK_t^{\alpha}T^{\beta} \cancel{\frac{1}{L_t^{\alpha+\beta}}} = \infty$$

Vemos que cumple las condiciones de INADA

Ahora dividiremos la función de producción entre $Y_t^{\alpha}$

$$\frac{Y_t}{Y_t^{\alpha}} = B_t \frac{K_t^{\alpha}}{Y_t^{\alpha}} T^{\beta} L_t^{1-\alpha-\beta}$$

$$Y_t^{1-\alpha} = B_t \left(\frac{K_t^{\alpha}}{Y_t^{\alpha}}\right) T^{\beta} L_t^{1-\alpha-\beta}$$

$$Y_t = \left[ B_t \left(\frac{K_t}{Y_t}\right)^{\alpha} T^{\beta} L_t^{1-\alpha-\beta} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$Y_t = B_t^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{K_t}{Y_t}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} T^{\frac{\beta}{1-\alpha}} L_t^{\frac{1-\alpha-\beta}{1-\alpha}}$$

$$Y_t = B_t^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{K_t}{Y_t}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} T^{\frac{\beta}{1-\alpha}} L_t^{1-\frac{\beta}{1-\alpha}} \ldots (I)$$

### 7.3.2 Determinación de la tasa de crecimiento

Para determinar la tasa de crecimiento de la economía, aplicaremos logaritmo natural a la ecuación (I).

$$Ln(Y_t) = \left(\frac{1}{1-\alpha}\right)Ln(B_t) + \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)Ln\left(\frac{K_t}{Y_t}\right) + \left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)Ln(T) + \left(1-\frac{\beta}{1-\alpha}\right)Ln(L_t)$$

Tomando la derivada temporal a la ecuación anterior, nos ayuda a obtener la tasa de crecimiento de la economía.

$$\frac{dLn(Y_t)}{dt} = \left(\frac{1}{1-\alpha}\right)\frac{dLn(B_t)}{dt} + \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\frac{dLn\left(K_t/Y_t\right)}{dt} + \left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)\frac{dLn(T)}{dt} + \left(1-\frac{\beta}{1-\alpha}\right)\frac{dLn(L_t)}{dt}$$

$$g_Y = \left(\frac{1}{1-\alpha}\right)g_B + \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)g_{(K/Y)} + \left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)g_T + \left(1-\frac{\beta}{1-\alpha}\right)g_L \ldots (II)$$

Nota: $\dfrac{dLn(K_t/Y_t)}{dt} = \dfrac{(\dot{K}_t/Y_t) - (\dot{Y}_t/Y_t)(K_t/Y_t)}{K_t/Y_t}$

$$\frac{dLn(K_t/Y_t)}{dt} = \frac{\dot{K}_t/Y_t}{K_t/Y_t} - (\dot{Y}_t/Y_t)$$

$$\frac{dLn(K_t/Y_t)}{dt} = g_K - g_Y = g_{(K/Y)}$$

Puesto que se asume que la tierra es de oferta fija entonces $g_T = 0$. Así mismo sabemos que la relación capital-producto $K/Y = v$, es una relación constante entonces $g_{(K/Y)} = 0$.
Reemplazando estos dos supuestos en la ecuación (II) obtenemos:

$$g_Y = \left(\frac{1}{1-\alpha}\right)g_B + \left(1-\frac{\beta}{1-\alpha}\right)g_L \ldots (III)$$

Asumiendo que la tasa de crecimiento poblacional esta representado por $n$, entonces $g_L = g_{poblacional} = n$.
Reemplazando en la ecuación (III), tenemos:

$$g_Y = \left(\frac{1}{1-\alpha}\right)g_B + \left(1-\frac{\beta}{1-\alpha}\right)n \ldots (IV)$$

Donde

$g_B = m_L$: Tasa de progreso tecnológico debido a la eficiencia del trabajo.

La ecuación (IV) nos quiere decir, que en una economía capitalista en la cual se esta considerando la tierra como un factor fijo, la tasa de crecimiento del producto (PBI) en el largo plazo dependerá de la tasa de progreso Tecnológico ($g_B$) y de la tas de crecimiento de la población ($n$).

Para hallar la tasa de crecimiento por trabajador que es lo que nos importa, pasaremos a reemplazar la tasa de crecimiento del producto por su equivalente en términos per cápita

$$y_t = \frac{Y_t}{L_t} \Rightarrow \frac{dLn(y_t)}{dt} = \frac{dLn(Y_t)}{dt} - \frac{dLn(L_t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad g_y = g_Y - n \quad \Rightarrow \quad g_Y = g_y + n \ldots (V)$$

Reemplazando la ecuación (V) en la ecuación (IV)

$$g_y + n = \left(\frac{1}{1-\alpha}\right) g_B + \left(1 - \frac{\beta}{1-\alpha}\right) n$$

$$g_y = \left(\frac{1}{1-\alpha}\right) g_B - \left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right) n \ldots (VI)$$

La ecuación (VI) nos quiere decir que la tasa de crecimiento del producto por trabajado depende directamente de la tasa de progreso tecnológico e inversamente de la tasa de crecimiento poblacional.

### 7.3.3 Tipología

En este caso se abstrae el progreso tecnológico de la ecuación (VI), quedando:

$$g_y = -\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right) n$$

Lo que nos da el caso de Malthus, por que no considera el progreso tecnológico, esto implica que en esta economía la tasa de crecimiento del producto por trabajador va ser negativo por que no considera la tasa de progreso tecnológico y esto lleva a la llamada *"profecía de Malthus"*.

# Apéndice de Revisiones Matemáticas

En esta parte revisaremos las herramientas matemáticas, que se utiliza a lo largo de este texto. Donde trataremos de repasar manera simplificada el cálculo elemental y de las matemáticas usadas que es de uso común en los modelos de crecimiento

## A.1 Derivadas

Sea $y = f(x)$ una función continua en el intervalo $< a,b >$ y $x_0 \in < a,b >$, cociente incremental cuando $\Delta x \to 0$ ( $x \in Dom \quad f$ )

$$\underset{\Delta x \to 0}{Lím} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad x \in Dom \quad f$$

$$x = \Delta x + x_0 \wedge \Delta x = x - x_0$$

La interpretación de la derivada, nos quiere decir que $f'(x_0)$ representa la pendiente de la recta tangente a la función $f(x)$ es el punto $x_0$

Un ejemplo de la definición de la derivada es $f(k) = 25k$ , entonces la derivada de la función con respecto a $k$ es $df / dk = 25$, esto quiere decir que un cambio pequeño del stock de capital, $f'(k)$ cambia por 25 veces la cantidad.

**Notación de derivadas**

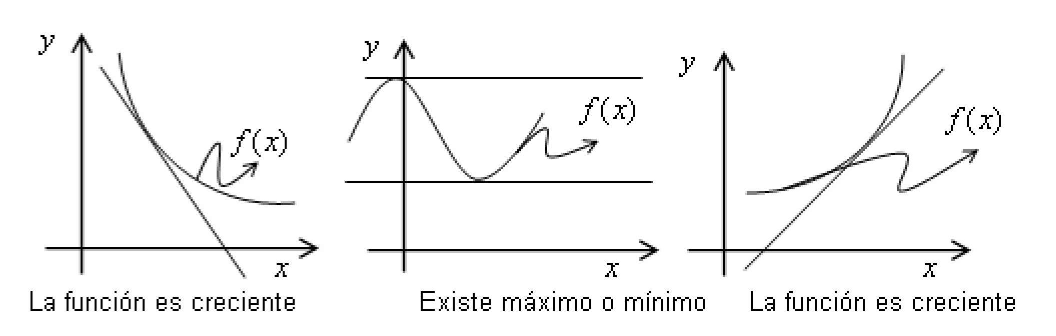
$f'(x)$: Notación de Lagrange.

$Df(x)$: Notación de Cauchy.

$\frac{dy}{dx}$: Notación de Leibnitz.

**Primera Derivada**

Esta derivada representa la pendiente de una recta tangente a una curva en un punto.



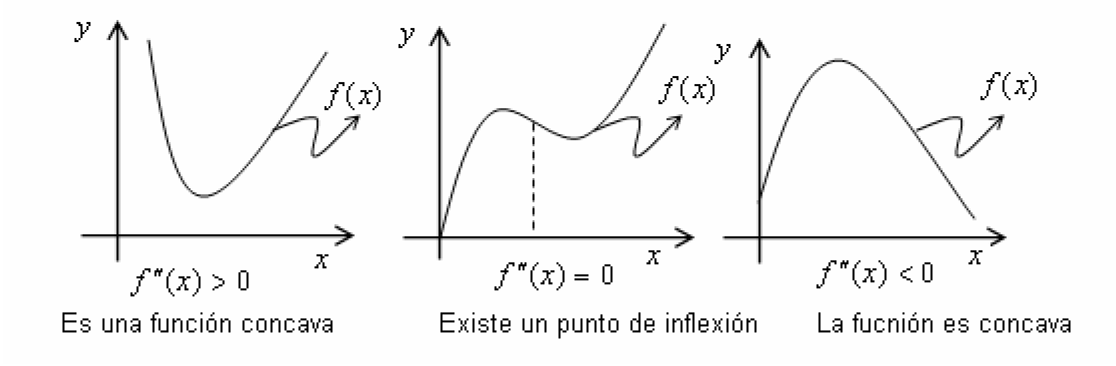

Si $f'(x) > 0$ entonces la función es creciente.

Si $f'(x) = 0$ entonces existe un punto máximo o mínimo.

Si $f'(x) < 0$ entonces la función es decreciente.

**Segunda Derivada**

Esta derivada se utiliza para saber si existen máximos, mínimos o y puntos de inflexión.




Si $f''(x) > 0$ entonces existe un punto mínimo.

Si $f''(x) = 0$ entonces la función tiene un punto de inflexión.

Si $f''(x) < 0$ entonces existe un máximo.

La regla mas conocida y aplicada es la *regla de la cadena*, donde $G(x)$ es una función continua donde $x \in$ Dom $f$ .

$$\frac{dG^n(x)}{dx} = n[G(x)]^{n-1}.G'(x)$$

## *A.1.1 Reglas de derivación*

Mostraremos las derivadas más utilizadas a lo largo de este texto que han sido aplicados a los modelos.

$\frac{d(c)}{dx} = 0$ (derivada de una constante) $c$ : es una constante

$\frac{dLnf(x)}{dx} = \frac{1}{f(x)}.f'(x)$ (derivada de una función logarítmica)

$\frac{de^{f(x)}}{dx} = e^{f(x)}.f'(x)$ (derivada de una función potencial )

$\frac{d[f(x) \pm g(x)]}{dx} = f'(x) \pm g'(x)$ (derivada de una suma y resta de funciones )

$\frac{dg^n(x)}{dx} = ng^{n-1}(x).g'(x)$ (derivada de la cadena)

$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d[h(x)/g(x)]}{dx} = \frac{h'(x)g(x) - g'(x)h(x)}{[g(x)]^2}$ (derivada de una división de funciones )

$\frac{df(x)}{dx} = h(x)\frac{dg(x)}{dx} + g(x)\frac{dh(x)}{dx}$ (derivada de un producto de funciones)

Donde $f(x) = h(x).g(x)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$ (derivada de la función de una función)

Donde $y = u(x)$, siendo $u = g(x)$

Aplicaciones de las reglas de derivación

Si $f(.) = 25$ entonces $\frac{df(.)}{dx} = \frac{d(25)}{dx} = 0$

Si $f(k) = Ln(k)$ entonces $\frac{d(Lnk)}{dk} = \frac{1}{k}$

Si $f(k) = e^{0.25k}$ entonces $\frac{df(k)}{dk} = \frac{d(e^{0.25k})}{dk} = 0.25e^{0.25k}$

Si $f(k) = 28k \pm 9$ entonces $\frac{df(k)}{k} = 28$

Si $f(k) = 5k^{0.2}$ entonces $\frac{df(k)}{dk} = 0.1k^{-0.8}$

Si $f(k) = \frac{h(k)}{g(k)}$ $\quad h(k) = 2k \wedge g(k) = 5k^3$

$$\frac{df(k)}{dk} = \frac{5k^3 \frac{d(2k)}{dk} - 2k \frac{d(5k^3)}{dk}}{(5k^3)^2} = \frac{10k^3 - 30.k^3}{25^6} = -\frac{4}{5k^3}$$

Si $f(k) = g(k).h(k)$ dado que $g(x) = 25k^2 \wedge h(k) = 4k^3$

$$\frac{df(k)}{dk} = 4k^3.\frac{d(25k^2)}{dk} + 25k^2 \frac{d(4k^3)}{dk}$$

$$\frac{df(k)}{dk} = 4k^3.50k + 25k^2.12k^2 = 500k^4$$

**Derivadas parciales**

Sea $f$ en dos o mas variables tenemos que $f$ es una función en tres variables $z = f(k,l,t)$.

$\frac{\partial f}{\partial k}$: La derivada parcial de $f$ respecto a $k$.

$\frac{\partial f}{\partial l}$: La derivada parcial de $f$ respecto a $l$.

$\frac{\partial f}{\partial t}$: La derivada parcial $f$ respecto a $t$.

Para las derivadas parciales de asume que la derivada de la función respecto a las demás variables son fijas o constantes y solo es variables la variable en estudio.

Aplicación: $F(K,L) = 25K^{0.25}L^{0.75}$

Hallar $\frac{\partial F}{\partial K} \wedge \frac{\partial F}{\partial L}$

$$\frac{\partial F}{\partial K} = 6.25\frac{1}{K^{0.75}}L^{0.75} \qquad \frac{\partial F}{\partial K} = 18.75\frac{1}{L^{0.25}}K^{0.25}$$

## A.1.2 Tasa de crecimiento

En la literatura de crecimiento es muy utilizada esta tasa, para expresar el cambio porcentual.

En este texto para simplificaciones matemáticas consideraremos a la tasa de crecimiento como la derivada $dK/dt$ entre su valor inicial $K$, y no usaremos la expresión de cambio porcentual.

$$\frac{K_t - K_{t-1}}{K_t}$$

Donde usaremos la representación de $\dot{z}$, para referirnos a $\frac{dz}{dt}$, lo que dividiendo entre $z$ nos da $\frac{\dot{z}}{z} = \gamma_z$ que representa a la tasa de crecimiento de $z$.

Ejemplo su pongamos que $\dot{L}/L = 0.02$, esta expresión nos quiere decir que la fuerza laboral esta creciendo al 2% en este país anualmente.

## A.1.3 Tasa de crecimiento natural

Es muy usada para hallar la tasa de crecimiento, generalmente cuando tenemos una expresión como se muestra a continuación.

Si $Y = KL$ entonces aplicando logaritmo natural a la expresión $Ln(Y) = Ln(K) + Ln(L)$.

Si $Y = K^{\alpha}$ aplicando logaritmo natural a la expresión $Ln(Y) = \alpha Ln(K)$.

Como vemos aplicando logaritmo natural a la expresión de un producto, una suma o división nos ayuda a obtener la tasa de crecimiento de la variable a analizar en forma sencilla.

## A.2 Optimización Dinámica: Teoría de control óptimo

La optimización dinámica tiene sus orígenes en el cálculo de variación, la teoría clásica de control y la programación lineal y no lineal (Bryson (1999)).

El cálculo de variación surgió en el siglo XVIII y recibió en los tratados de Euler (1707-1783) y de Lagrange (1736-1813).

En 1755 Lagrange comunico a Euler el método general analítico, creado por él, en el que introdujo la variable de una función y donde extiende a las variaciones de la regla de cálculo diferencial (Cerda, Emilio (2001) "Optimización Dinámica" pág.:7, editorial: Pearson Educación, S.A. Madrid)

En economía los métodos dinámicos se comenzaron a utilizar en los años cincuenta y sesenta del siglo XX con Hotelling y Ramsey.

Hay que mencionar que existen dos métodos para solucionar problemas dinámicos. El primero fue desarrollado por Richard Bellman (1957), y es muy usado en la solución de problemas estocásticos. El segundo se debe al matemático ruso L.Pontryagin (1962) que se basa en el método del hamiltoniano y este método es el que se a usado para solucionar los problemas a lo largo de este texto y que pasaremos a explicar.

Supongamos que un agente económico tiene que escoger o controlar un conjunto de variables en un tiempo, llamadas *variables de control*. Para esto el agente quiere maximizar una *función objetivo* sujeta a una serie de restricciones dinámicas que describen la evolución del estado de la economía, que esta representado por *variables de estado*.

$$Máx \quad J(0)=\int_0^T U(c_t,k_t,t)dt$$

$$s.a: \quad \dot{k}_t = g(k_t,c_t,t)$$

$$k_0 \text{ Esta dado}$$

$$k_t e^{-\bar{r}_T T} \geq 0$$

Donde

$J(0)$: Valor de la función objetivo en el instante inicial.

$\bar{r}_T$ : Tasa de descuento que se aplica en el último momento.

$T$ : Momento final.

$k_t$ : Variable de estado.

$c_t$: Variable de control.

Identificar las variables de control y estado, como sabemos las variables de control son las que no aparecen con el puntito, al contrario de las variables de estado que aparecen con un puntito encima de la variable.

Plantear el hamiltoniano, donde es la suma de la función objetivo instantánea más un precio implícito o multiplicador de Lagrange multiplicado por la restricción que no tiene el puntito.

$$H(k_t,c_t,\lambda_t,t)=U(k_t,c_t,\lambda_t)+\lambda_t.g(k_t,c_t,t)$$

Tomando la derivada con respecto a la variable de estado e igualando al negativo del multiplicador con respecto al tiempo.

$$\frac{\partial H}{\partial k_t} = \frac{\partial U}{\partial k_t} + \lambda_t . \frac{\partial g}{\partial k_t} = -\dot{\lambda}_t$$

Se multiplica a la variable de estado por el precio implícito en el momento terminal y se iguala a cero, a esta condición se llama *la condición de transversalidad.*

$$\lambda_T k_T = 0$$

Si el horizonte temporal fuese infinito la condición será:

$$\lim_{t \to \infty} \lambda_t k_t = 0$$

En el caso que la función objetivo no tenga tasa de descuento la condición será:

$$\lim_{t \to \infty} H_t = 0$$

## A.3 Caso de múltiples variables

Es el caso mas general donde existen múltiple variables de control y múltiples variables de estado representados por la generalización del control óptimo.

Suponga un modelo con muchas variables, supongamos $n$ *variables de control* $c_{1t}, c_{2t}, \ldots c_{nt}$ y variables de estado $k_{1t}, k_{2t}, \ldots k_{pt}$ .

$$Máx \quad J(0) = \int_0^T U(c_{1t}, c_{2t}, \ldots c_{nt}, k_{1t}, k_{2t}, \ldots k_{pt}, t) dt$$

$$s.a: \begin{cases} \dot{k}_{1t} = g(c_{1t}, c_{2t}, \ldots c_{nt}, k_{1t}, k_{2t}, \ldots k_{pt}) \\ \dot{k}_{2t} = g(c_{1t}, c_{2t}, \ldots c_{nt}, k_{1t}, k_{2t}, \ldots k_{pt}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{k}_{pt} = g(c_{1t}, c_{2t}, \ldots c_{nt}, k_{1t}, k_{2t}, \ldots k_{pt}) \end{cases}$$

$$0 \le t \le T$$

$k_{10}, k_{20}, \ldots, k_{pt}$ Están dadas

$$k_{1T} e^{-\bar{r}_T T} \ge 0$$

La solución de este problema con una variable de control y de estado.

Identificar las variables de control y de estado.

Las *variables de estado* son las que aparecen con el puntito encima de la variable en la [s.a], las *variables de control* son las que no aparecen con el puntito.

Se plantea la función Hamiltoniano como la suma de la *función objetivo* instantánea más un multiplicado de Lagrange por cada restricción multiplicado por la ecuación que no aparece en el puntito.

$$H \equiv U(c_{1t}, c_{2t}, \ldots c_{nt}, k_{1t}, k_{2t}, \ldots k_{pt}) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i . g_i()$$

Se deriva el hamiltoniano con respecto a cada una de las variables de control y se iguala a cero.

$$\frac{\partial H}{\partial c_j} = 0 \qquad j = \overline{1, n}$$

Se deriva el hamiltoniano con respecto a cada una de las variables de estado y se iguala al negativo de la derivada del multiplicado.

$$\frac{\partial H}{\partial k_i} = -\dot{\lambda}_{it} \qquad i = \overline{1, p}$$

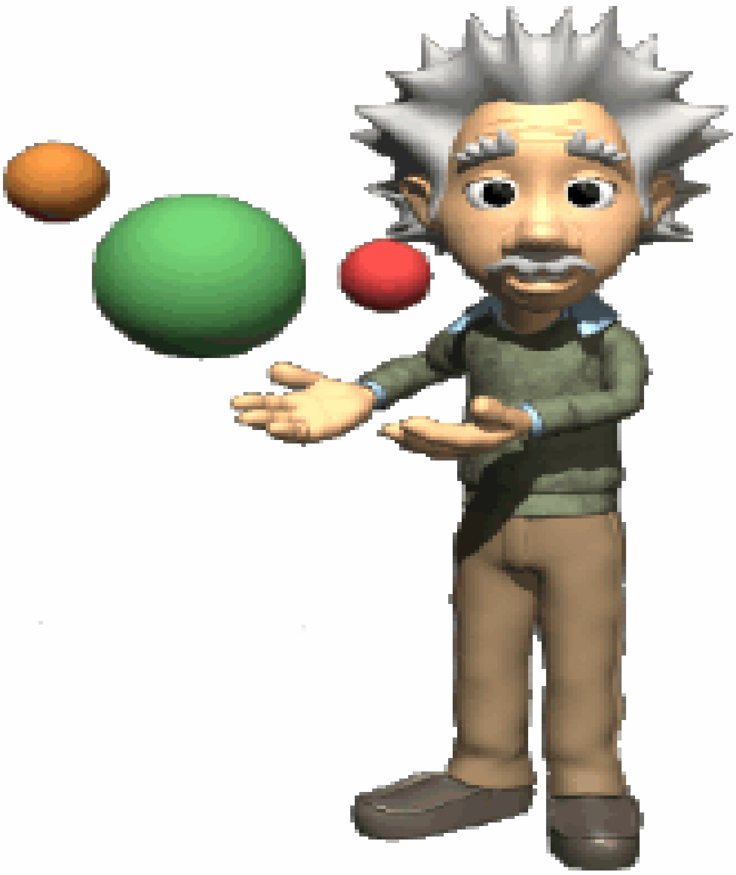
Se multiplica las variables de estado en el momento terminal, por su multiplicador con el mismo momento y se iguala acero, a esta condición se llama la *condición de transversalidad*.

$$\lambda_{iT} k_{iT} = 0 \qquad i = \overline{1, p}$$

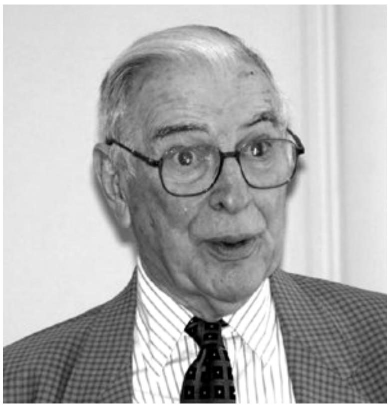
Si el horizonte es infinito la *condición de transversalidad* esta dada por:

$$\underset{t \to \infty}{Lím} \lambda_{it} k_{it} = 0 \quad i = \overline{1, p}$$

# Biografías



## Arrow Kenneth



(Nueva York, 1921) Economista estadounidense, premio Nobel de Economía en 1972, junto con el británico Sir John R. Hicks, por sus teorías sobre el equilibrio general económico y el bienestar. Inició sus estudios en el City College de Nueva York, donde obtuvo en 1940 el grado de bachiller en Ciencias Sociales y, a continuación, ingresó en la Universidad de Columbia para estudiar Ciencias Económicas. Durante la Segunda Guerra Mundial sirvió en el ejército como capitán de las fuerzas aéreas en una unidad de Meteorología.

En 1946 reanudó sus estudios universitarios en Columbia, completados después en la Universidad de Chicago (1948-1949), donde fue contratado como profesor ayudante de Economía. En su nuevo destino formó parte de la comisión Cowles para la investigación económica, un equipo de jóvenes economistas dirigido por Tjalling C. Koopmans, pionero de la Econometría y que influyó decisivamente en Arrow.

Kenneth Arrow fue una de las más destacadas figuras de la nueva línea de economistas que fundamentaban sus trabajos en profundos conocimientos estadísticos. En 1951 publicó su obra más importante, *Elección social y valores individuales*, en la que expuso su "teorema de la imposibilidad", según el cual resulta inviable elaborar una función de bienestar social a partir de funciones de bienestar individual sin infringir ciertas condiciones mínimas de racionalidad y equidad; por esta obra se reconoce a Kenneth Arrow como el fundador de la moderna teoría económica de la elección social

Entre 1949 y 1968 trabajó en la Universidad de Stanford, primero como profesor ayudante y, más tarde, como jefe del Departamento de Economía y Estadística; también fue miembro del equipo de Investigaciones en Ciencias Sociales (1952) y del Instituto de Estudios Avanzados para Ciencias del Comportamiento (1956-1957). En 1962 formó parte del Consejo de Economía del gobierno y un año después fue nombrado miembro del Churchill College de Cambridge. Entre 1968 y 1979 trabajó en la Universidad de Harvard (en la que introdujo sus nuevos métodos para elaborar teoría económica) y en 1979 regresó a Stanford.

Perteneció a diversas instituciones y asociaciones profesionales, entre ellas la Sociedad Econométrica, que presidió en 1956; la Academia Nacional de las Ciencias; la Asociación Americana de Economía, que en 1957 le premió con la Medalla John Bates Clark; la Academia Americana de las Artes y las Ciencias; la Sociedad Filosófica Americana; y la Asociación Americana de Estadística.

Otras obras suyas son *Essays in the Theory of Risk Bearing* (1971); *General competitive analysis* (1971)*; The Limits of Organization* (1974); *General equilibrium* (1983); *Social Choice and Justice* (1983); *The economics of information* (1984); *Individual choice under certainty and uncertaint* (1984); *Social choice and multicriterion decision-making* (1986); y *Lecturas de teoría política positiva* (1991).

*Extraído de: http://www.biografiasyvidas.com/biografia/a/arrow.htm*

## Domar David

(Joshua Domashevitsky; Lódz, 1914 - Concord, 1997) Economista estadounidense de origen polaco. Representante de la escuela keynesiana, fue responsable del célebre modelo Harrod-Domar de crecimiento económico, así como de diversos trabajos en historia económica.

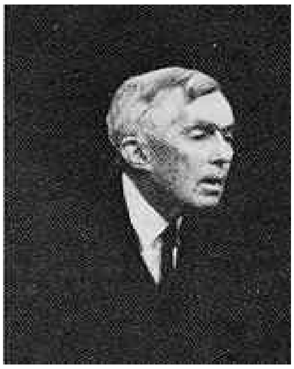
Pasó su juventud en Manchuria y China, hasta que en 1936 emigró a los Estados Unidos. Ingresó en la Universidad de Berkeley (California), donde se licenció en 1939, y posteriormente pasó a la Universidad de Michigan en la que obtuvo el doctorado en Estadística Matemática en 1941. En 1943 se licenció en Ciencias Económicas por la Universidad de Harvard, materia en la que se doctoró en 1947 en ese mismo centro. Entre 1943 y 1946 fue asesor económico del Consejo de Gobernadores de la Reserva Federal, y al año siguiente profesor ayudante de Economía en el Instituto Carnegie de Tecnología.

En 1946 contrajo matrimonio con Carola Rosenthal, con quien tuvo dos hijos. Sus primeros trabajos trataron acerca del déficit público y su influencia sobre el crecimiento económico, así como en las cuestiones del pleno empleo y la acumulación de capital. En 1946 desarrolló, paralelamente a Roy F. Harrod, un modelo de crecimiento basado en las tesis keynesianas sobre el papel ejercido por la demanda.

En 1958 fue nombrado profesor de Economía en el Instituto de Tecnología de Massachusetts, centro en donde permaneció hasta su jubilación en 1984. Fue asesor económico de varios organismos. Sus obras más destacadas fueron *Expansión y Empleo* (1947), *Acumulación de Capital* y *Fin de la Prosperidad* (1949), *Ensayos sobre Teoría del Crecimiento Económico y Capitalismo* (1957), *La Granja Colectiva Soviética como productor Cooperativo* (1966), *Las causas de la Esclavitud: una hipótesis* (1970) y *Capitalismo, socialismo y Servidumbre* (1989).

*Extraído de* *http://www.biografiasyvidas.com/biografia/d/domar.htm*

## Harrod Roy.F



Roy Harrod es un economista de Oxford, contemporáneo, amigo y seguidor de J.M.Keynes. En todos sus trabajos subyace una visión dinámica de la economía, más sofisticada y realista, por tanto, que la visión estática de la mayoría de los teóricos.

Harrod fue el primero en proponer un gran número de ideas básicas de la teoría económica aunque no fue reconocido como tal en su tiempo. Propuso, en 1931, la forma de la curva de costes medios a largo plazo como una envolvente de las curvas a corto plazo, una idea pionera también fue descubierta independientemente por Jacob Viner. Estableció las bases del análisis de la teoría de la competencia imperfecta que más adelante desarrolló Joan Robinson. Diseñó el modelo del multiplicador-acelerador en 1936, posteriormente formalizados por Samuelson y Hicks. Formuló el modelo IS-LM en 1937. En 1939 publica un análisis del comportamiento empresarial en el que propone un modelo evolutivo de selección natural de los comportamientos de maximización de beneficios, idea que sería recogida y desarrollada por Armen A. Alchian en los años 50. Su contribución más popular es el modelo de crecimiento llamado de Harrod-Domar, propuesto inicialmente por él en 1939 y desarrollado posteriormente por Evsey Domar, que sentó las bases de la teoría del crecimiento económico de la postguerra.

**Obras de Roy F. Harrod**

"Notes on Supply", 1930, EJ.

"The Law of Decreasing Costs", 1931, EJ.

International Economics, 1933.

"Doctrines of Imperfect Competition", 1934, QJE.

"The Equilibrium of Duopoly", 1934, EJ.

"The Expansion of Credit in an Advancing Economy", 1934, Economica

The Trade Cycle: an essay, 1936.

"Mr. Keynes and Traditional Theory", 1937, Econometrica.

"Price and Cost in Entrepreneurs' Policy", 1939, Oxford EP.

"Essay in Dynamic Theory", 1939, EJ

A Page of British Folly, 194?

Towards a Dynamic Economics, 1948.

The Life of John Maynard Keynes, 1951.

Economic Essays, 1952.

Foundations of Inductive Logic, 1956.

"Professor Fellner on Growth and Unemployment", 1957, Kyklos

"Factor Price Relations Under Free Trade", 1958, EJ.

"Domar and Dynamic Economics", 1959, EJ

"Second Essay on Dynamic Theory", 1960, EJ.

"Themes in Dynamic Theory", 1963, EJ.

The British Economy, 1963.

"Retrospect on Keynes", 1963, in Lekachman, editor, Keynes's General Theory.

Reforming the World's Money, 1965.

Dollar-Sterling Collaboration, 1968.

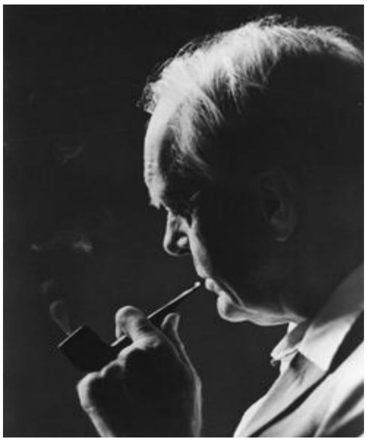
Money, 1969.

Economic Dynamics, 1975.



*Extraído de: http://www.eumed.net/cursecon/economistas/harrod.htm*

## Hicks John



Hijo de un periodista del diario local del pueblo, John Hicks nació en Warwick, Inglaterra en 1904. En el colegio mostró un gran interés por las matemáticas, la literatura y la historia. Solo con el tiempo iría haciendo patente su afición a la economía. Luego de graduarse en la Universidad de Oxford, ejerció como profesor en la London School of Economics (1926 -1935) y en las universidades de Cambridge (1935-1938), Manchester (1938-1946) y, finalmente, en Oxford, donde estuvo desde 1946 hasta su retiro de la actividad académica.

En un principio, Hicks se dedico a trabajos descriptivos de las relaciones industriales, pero gradualmente se movió hacia una perspectiva más analítica.

A fines de la década del 30, publico sus obras más populares e importantes. Por una parte, Valor y capital, donde llevo a cabo una destacada labor de unificación entre las teorías del ciclo económico y del equilibrio general, y quizás su aporte mas popular - un articulo publicado en la revista Econometrica: "Mr. Keynes y los clásicos" (1937). En este articulo, Hicks realizo un esfuerzo de conciliación del pensamiento de Keynes, cuya obra fundamental recién se había publicado -generando gran expectación, con la economía neoclásica, que estaba siendo severamente cuestionada tras la crisis economica de los años 30. De la conciliación de ambos mundos resulto la teoría "Hicks -Hansen" o, como posteriormente seria conocida, el "modelo IS-LM".

En 1939 publico su obra mas importante, Valor y capital, donde llevo a cabo una destacada labor de unificación entre las teorías del ciclo económico y d el equilibrio general. En el ámbito de la teoría de la distribución, demostró que el factor de producción de mayor crecimiento (en el caso de las economías occidentales, el capital) veía reducida su participación en el total de ingresos de la economía. Así mismo realizo decisivas aportaciones a la economía financiera, especialmente en el campo de los derivados.

En 1972 le fue concedido el Premio Nobel de Economía, que compartió con el estadounidense Kenneth Joseph Arrow. Durante los últimos años de su vida, Hicks siguió trabajando en investigaciones sobre el desarrollo económico y, particularmente, sobre el campo de la teoría del equilibrio. Falleció en Gloucestershire, al sur de Gran Bretaña, en 1989.

*Extraído de:* http://www.eco-finanzas.com/economia/economistas/Hicks.htm

## Kaldor Nicholas

(Budapest, 1908 - Papworth Everard, 1986) Economista británico de origen húngaro. Profundamente influido por la economía keynesiana y de ideario socialdemócrata, intentó realizar una síntesis de la teoría de Keynes con los dictados económicos más clásicos y ortodoxos, a la que realizó una serie de aportaciones fundamentales sobre el crecimiento económico, la distribución de la renta y la política impositiva. En sus últimos años se distinguió por ser uno de los mayores críticos de la política monetaria practicada por el Gobierno conservador de Margaret Thatcher.

Kaldor cursó estudios universitarios en la prestigiosa London School of Economics, en la que posteriormente impartió clases entre los años 1932 a 1942. Tras dos años alejado de la docencia, en el año 1949 reemprendió su carrera académica en el King´s College de la Universidad de Cambridge, donde permaneció hasta el año 1975.

En la década comprendida entre 1955 a 1964, Kaldor actuó como asesor económico para varios países (India, México y Australia entre otros muchos), ocupación que pasó a desempeñar para el Gobierno británico y para su ministerio de Hacienda en dos períodos diferentes (1964-1968; 1974-1976).

En su trabajo A model of Economic Growth (Un modelo de desarrollo económico), publicado en el año 1957 en la revista The Economic Journal, y posteriormente en el año 1960 en Essays in Economic Stability and Growth (Ensayos sobre estabilidad y desarrollo económico), Kaldor desarrolló un modelo que él mismo definió como keynesiano, que complementaba el propuesto por Harrod y Domar, y en el que trató de determinar la variación de la tasa de inversión en función de la tasa de beneficios. Es autor de una ingente cantidad de publicaciones, repartidas entre congresos, ponencias, revistas, ensayos y libros de divulgación económica.

Estudió en la London School of Economics, de la que fue profesor (1932-47),así como, desde 1949, del King's College de Cambridge. Asesor económico (1955-64) de diversos países -India, México y Australia entre ellos- y del gobierno británico (1964-68), sus aportaciones sobre el crecimiento económico, la distribución de la renta y la política fiscal son fundamentales.

Sobre el crecimiento desarrolló un modelo, que él mismo definió como keynesiano y que complementa el de Harrod-Domar, en el que trata de determinar la variación de la tasa de inversión en función de la tasa de beneficios, trabajo que apareció publicado en The Economic Journal con el título de «A Model of Economic Growth» (Un modelo de desarrollo económico, 1957) y posteriormente en Essays in Economic Stability and Growth (Ensayos sobre estabilidad y desarrollo económico, 1960).

Sus estudios sobre la teoría de la distribución fueron publicados igualmente en The Economic Journal con el título «Welfare Propositions and Interpersonal Comparisons of Utility». Por último, sobre política fiscal escribió An Expenditure Tax (Un impuesto al gasto, 1955) y Essays in Economic Development (Ensayos sobre el desarrollo económico,1961). También publicó Capital Accumulation and Economic Growth (1961), Conflicts in Policy Objetives (1971) y Further Essays on Economic Theory (1978).

*Extraído:* http://www.biografiasyvidas.com/biografia/k/kaldor.htm

## Kalecki Michal

Economista polaco. Al parecer, gran parte de los principios que estableció Keynes en 1936 habían sido ya avanzados y publicados anteriormente por Kalecki... en polaco.

En los años 30, sin embargo, es reconocido mundialmente. Sus publicaciones más conocidas tratan de los ciclos económicos. Fue también un pionero en el análisis matemático de la dinámica económica. Utiliza ampliamente conceptos clásicos y marxistas, interesándose por los conflictos de clase, la distribución de la renta y la competición imperfecta.

Estas ideas tuvieron influencia y reconocimiento en la keynesiana escuela de Cambridge (especialmente entre sus miembros más próximos al marxismo como J. Robinson y N. Kaldor) y entre los economistas post-keynesiaños.

**Obras de Michal Kalecki**

"Mr Keynes's Predictions", 1932, *Przeglad Socjialistyczny*.

*An Essay on the Theory of the Business Cycle*, 1933.

"Essai d'une theorie du mouvement cyclique des affaires", 1935, *Revue d'economie politique*.

"A Macrodynamic Theory of Business Cycles", 1935, *Econometrica*.

"The Mechanism of Business Upswing", 1935, *Polska Gospodarcza*.

"Some Remarks on Keynes's Theory", 1936, *Ekonomista*.

"A Theory of the Business Cycle", 1937, *RES*.

"A Theory of Commodity, Income and Capital Taxation", 1937, *EJ*.

"The Principle of Increasing Risk", 1937, *Economica*.

"The Determinants of Distribution of the National Income", 1938, *Econometrica*.

*Essays in the Theory of Economic Fluctuations*, 1939.

"A Theory of Profits", 1942, *EJ*.

*Studies in Economic Dynamics*, 1943.

"Political Aspects of Full Employment", 1943, *Political Quarterly*.

"Professor Pigou on the Classical Stationary State", 1944, *EJ*.

"Three Ways to Full Employment", 1944 in *Economics of Full Employment*.

"A Note on Long Run Unemployment", 1950, *RES*.

*Theory of Economic Dynamics: An essay on cyclical and long- run changes in capitalist economy*, 1954.

"Observations on the Theory of Growth", 1962, *EJ*.

*Studies in the Theory of Business Cycles, 1933-1939*, 1966.

"The Problem of Effective Demand with Tugan-Baranovski and Rosa Luxemburg", 1967, *Ekonomista*.

"The Marxian Equations of Reproduction and Modern Economics", 1968, *Social Science Information*.

"Trend and the Business Cycle", 1968, *EJ*.

"Class Struggle and the Distribution of National Income", 1971, *Kyklos*.

*Selected Essays on the Dynamics of the Capitalist Economy, 1933-1970*, 1971.

*Selected Essays on the Economic Growth of the Socialist and the Mixed Economy*, 1972.

*The Last Phase in the Transformation of Capitalism*, 1972.

*Essays on Developing Economies*, 1976.



*Extraído de: http://www.eumed.net/cursecon/economistas/kalecki.htm*

## Kuznets Simon

Nacido en Járkov, Ucrania y nacionalizado estadounidense. De padres judíos, inició sus estudios universitarios en su país natal, pero en 1922 se mudó a Estados Unidos terminando sus estudios en la Universidad de Columbia.

Fue contratado para trabajar en la Oficina Nacional de Investigación Económica en 1927. Después fue catedrático de Economía y Estadística de la Universidad de Pensilvania en 1936.

Contrastó la teoría Keynesiana del ahorro mediante elementos estadísticos y econométricos analizando el Producto Nacional Bruto de Estados Unidos en su libro "Ingreso nacional y composición" publicado en 1941.

Simon fue presidente del comité de consejo de investigación de la sociología sobre el desarrollo económico (1949-1968), trabajó sobre todo en análisis cuantitativo comparativo del desarrollo económico de naciones.

Fue Director del asociado de la oficina del planeamiento y de la estadística y director de la investigación, comité de planeamiento, tablero de producción de la guerra, 1944-1946; Presidente del proyecto de Falk para la investigación económica en Israel, 1953-1963; miembro del tablero de los administradores y del presidente honorario, instituto de Maurice Falk para la investigación económica en Israel, 1963 y presidente, comité de consejo de investigación de la sociología sobre la economía de China, 1961-1970.

Kuznets era también uno de los primeros trabajadores en la economía del desarrollo, particularmente recogiendo y analizando las características empíricas de los países en vías de desarrollo (1965, 1966, 1971, 1979).

Entre sus varios descubrimientos que chispearon los programas de investigación teóricos importantes estaba su descubrimiento de la relación en forma de "U" invertida entre la desigualdad y el desarrollo económico (1955, 1963) de la renta; él también descubrió los patrones en el comportamiento de la ahorro-renta que lanzó la hipótesis de la Vida Ciclo Permanente de Renta de Modigliani y de Friedman.

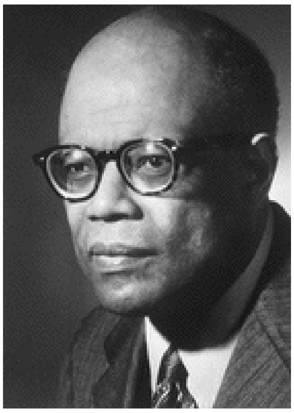
Fue un economista con grandes ideas, las cuales lo llevaron a ganar el premio de ciencias económicas del banco sueco y recibió el Premio Nobel de Economía en 1971 por su interpretación del crecimiento económico que permitió desarrollar nuevos planteamientos sobre la estructura social y económica del mundo. Los teóricos de la economía consideran a Kuznets como un empirista. Desarrolló el concepto de producto nacional bruto, que es la suma de bienes y servicios que produce una nación, y se utiliza para determinar la tasa de crecimiento económico de un país.

**OBRAS**

Ingreso nacional y su composición (2 volúmenes, National Income and Its Composition, 1941), Crecimiento económico moderno (Modern Economic Growth, 1966) y Hacia una teoría del crecimiento económico (Toward a Theory of Economic Growth, 1968)

Información recopilada por Paola Rebeca Acuña, ULACIT, 2006
FUENTE: www.economistas.org/economistas.asp?fam=4&qsa=205&qsd=133

## Lewis Arthur



Economista británico, nacido en Santa Lucía, en las Antillas, obtuvo el Premio Nobel de Economía en 1979, compartido con Theodore W. Schultz, por su investigación pionera en el desarrollo económico con atención particular a los problemas de los países en desarrollo. Estudió en el St. Mary's College de santa Lucía y en la London School of Economics, donde obtuvo el doctorado en 1940.Fue profesor en las Universidades de Londres, Manchester, West India, y Princeton. Fue asesor de la Comisión Económica de las Naciones Unidas para Asia y el Lejano Oriente y Presidente del Banco de Desarrollo del Caribe.

Lewis analiza los países en desarrollo y pone de relieve su dualidad: Hay en ellos dos sectores económicos claramente diferenciados, el rural y el urbano. En el sector urbano, la productividad del trabajo es mucho mayor que en el campo. Eso permite que haya ahorro e inversión por lo que aumentará de forma sostenida la demanda de trabajadores. Esa demanda puede ser satisfecha sin que aparezcan tensiones salariales ya que hay una oferta de trabajo infinitamente elástica procedente de las zonas rurales.

El supuesto básico del modelo de Lewis es que el sector rural está superpoblado y la productividad del trabajo es muy baja. La productividad marginal del trabajo rural es prácticamente nula, lo que significa que la emigración de trabajadores del campo a la ciudad no provoca disminución del producto agrícola.

Se produce así en el sector urbano un "círculo virtuoso" ahorro > inversión > empleo que no se ve interrumpido por tensiones salariales ni por falta de trabajadores, por lo que el crecimiento del sector industrial-urbano está garantizado hasta que el sector rural de baja productividad quede despoblado, lo que implicará el final de la situación de subdesarrollo.

**Obras:**

La planeación económica, 1949. Ed. Fondo de Cultura Económica, México, 1942.

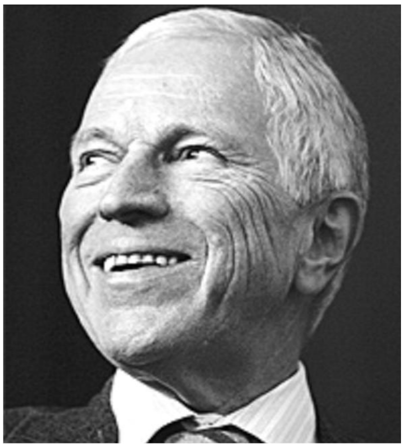
Teoría del desarrollo económico, 1955. Fondo de Cultura Económica, México 1968.

Labour in the West Indies, 1939.
Economic Problems of Today, 1940.
"The Two-Part Tariff", 1941, Economica
"The Economics of Loyalty", 1942, Economica
"Monopoly and the Law", 1943, Modern Law Review
"Competition in Retailing", 1945, Economica
Monopoly in British Industry, 1945.
"Fixed Costs", 1946, Economica
"The Prospect Before Us", 1948, Manchester School
"Colonial Development", 1949, Transactions of Manchester Statistical Society
"The British Monopolies Act", 1949, Manchester School
"The Effects of the Overseas Slump on the British Economy", with F.v. Meyer, 1949, Manchester School
"Sur Quelques Tendences Seculaires", 1949, Economie Appliquee
Economic Survey, 1919-39, 1949.
Overhead Costs, 1949.
Principles of Economic Planning, 1949.
"World Production, Prices and Trade, 1870-1960", 1952, Manchester School
"Economic Development with Unlimited Supplies of Labor", 1954, Manchester School

"Thoughts on Land Settlement", 1954, J of Agric Econ
"Trade Drives", 1954, District Bank Review
"Secular Swings in Production and Trade, 1870-1913", with P.J. O'Leary, 1955, Manchester School.
The Theory of Economic Growth, 1955.
"Patterns of Public Revenue and Expenditure", with A. Martin, 1956, Manchester School
"International Competition in Manufactures", 1957, AER
"Unlimited Labor: Further notes", 1958, Manchester School
"Employment Policy in an Underdeveloped Area", 1958, Social and Economic Studies
"The Shifting Fortunes of Agriculture", 1960, in Agriculture and its Terms of Trade
"Depreciation and Obsolescence as Factors in Costing", 1961, in Meij, editor, Depreciation and Replacement Policy
"Education and Economic Development", 1961, Social and Economic Studies
"Education for Scientific Professions in the Poor Countries", 1962, Daedalus
"Industrialization and Social Peace", 1963 in Conference Across a Continent
"Secondary Education and Economic Structure", 1964, Social and Economic Studies
"A Review of Economic Development", 1965, AER
Politics in West Africa, 1965.
"Unemployment in Developing Countries", 1967, World Today
Some Aspects of Economic Development
"Economic Aspects of Quality in Education", 1969, in Beeby, editor, Qualitative Aspects of Educational Planning
Aspects of Tropical Trade, 1883-1965, 1969.
Socialism and Economic Growth, 1971.
The Evolution of Foreign Aid, 1972.
"Reflections on Unlimited Labour", 1972, in diMarco, editor, International Economics and Development
"Objective and Prognostications", 1972, in Ranis, editor, Gap Between Rich and Poor Nations
Development Economics: an outline, 1974.
The University in Less Developed Countries, 1974.
"Development and Distribution", 1976, in Cairncross and Puri, editors, Employment, Income Distribution and Development Strategy
The Less Developed Countries and Stable Exchange Rates, 1978.
The Evolution of the International Economic Order, 1978.
Growth and Fluctuations, 1870-1913, 1978.
"The Dual Economy Revisited", 1979, Manchester School
"The Slowing Down of the Engine of Growth: Nobel Lecture", 1980, AER.
"The Rate of Growth of World Trade, 1830-1973", 1981, in Grassman and Lundberg, editors, World Economic Order

*Extraído de: http://www.eumed.net/cursecon/economistas/lewis.htm*

## Phelps Edmund



Edmund Phelps nació en 1933 en Evanston, Illinois, Estados Unidos. A la edad de seis, su familia se mudo a Hastings - on- Hudson, Nueva York. Su padre era publicista y su madre nutricionista. Ambos perdieron sus empleos, por lo que tuvieron que vivir gracias a la ayuda de los abuelos de Edmund. Phelps realizo sus estudios secundarios en el colegio de Amherst. Inicialmente, se intereso por la filosofía, pero su padre lo convenció de que tomara unos cursos de economía. Luego de terminar sus estudios secundarios, en 1955, Phelps comenzó sus estudios universitarios en Yale. Entre sus profesores se encontraron James Tobin y Thomas Schelling. Obtuvo su doctorado en 1959. Comenzó su carrera académica en la comisión Cowles en Yale, luego siguió en la Universidad de Pennsylvania y en 1971 en la Universidad de Columbia, en Nueva York. Allí es desde 1982 profesor de economía política.

Phelps se especializo en el estudio de la economía China. En 1981 fue nombrado miembro de la Academia Nacional de Ciencias de Estados Unidos y en el ano 2000 fue nombrado miembro distinguido de la Asociación de Economía Americana. Ha trabajado para el Departamento del Tesoro, el Comité de Finanzas del Senado y la Reserva Federal, así como para instituciones extranjeras como el Observatorio francés de coyunturas economizas. Phelps es doctor honoris causa por las Universidades de Mannheim (Alemania), Roma, Nova Lisboa, Islandia, Paris, Dauphine y Pekín.

En Septiembre de 2006, Edmund Phelps gano el Premio Nobel de Economía, por 'sus análisis sobre compensaciones internacionales en la política macroeconómica', según informo la Academia Real Sueca de las Ciencias. 'El trabajo de Edmund Phelps ha ahondado nuestro conocimiento de la relación entre los efectos de corto y largo recorrido en la política internacional. Según publico la academia, sus contribuciones han tenido un impacto decisivo sobre la investigación economica y política.

**Aportes**

Los aportes de Phelps se concentran en la introducción de las expectativas de los agentes económicos en la determinación de la relación entre la tasa de inflación y desempleo (La Curva de Phillips a largo plazo), y una formula de la formación de capital a largo plazo, que incluye a la educación y a la inversión en investigación y desarrollo como elementos que influyen en el consumo per capita a largo plazo.

Curva de Phillips En los años sesenta, la curva de Phillips era muy popular. Esta curva representa la relación existente entre la inflación y el desempleo. La curva de Phillips indicaba que ya no se podrían alcanzar en forma conjunta el pleno empleo y una baja inflación, habría que aceptar en nivel de empleo que fuera congruente con un nivel de inflación aceptable.

Phelps desafió esta idea, indicando que los individuos tienen un conocimiento incompleto de la economía, y basan sus acciones, por ejemplo, la fijación de precios, teniendo en cuenta sus expectativas. Principalmente, se dice que la inflación presente influirá de manera decisiva en la inflación futura. 'Una baja inflación hoy conduce a la expectativa de baja inflación también en el futuro', señala. Phelps dice que cuando la inflación actual y la esperada coinciden, se da un 'equilibrio de la tasa de desempleo'. La academia Sueca de Ciencias afirmo, resumiendo las ideas de Phelps, que 'el equilibrio en el desempleo solo depende del funcionamiento del mercado laboral. Los intentos de reducir permanentemente el paro por debajo del 'equilibrio de la tasa de desempleo' solo tendrán como consecuencia un continuado aumento de la inflación'. *La Regla de Oro de la Formación de Capital*.

La teoría neoclásica de crecimiento, señala que existe un estado estacionario en el que todas las variables (consumo, inversión, producción, etc.) varían a una tasa constante. Este estado estacionario depende de ciertas características institucionales de la economía, como la tasa de crecimiento de la población y la tasa de ahorro de la economía. Otro de los aportes de Phelps consiste en introducir dentro de esta teoría elementos como la educación y la inversión en tecnología. Si bien el no fue el único ni el primero en hacer esto. Phelps, establece que hay una tasa de formación de capital físico y una tasa de formación de capital humano. Por otro lado, hay una tasa de depreciación. Entonces, si bien mayor capital (físico y humano) implican mayor producción, también implican mayor depreciación, por lo que existe un punto en el que la formación de capital es tal que, si sigue aumentando, el consumo de estado estacionario disminuye. Por lo que no es conveniente ahorrar más de lo indica la regla de oro de la formación de capital.

**Algunas Obras**

Entre los libros de Phelps, se destacan 'Rewarding Work: How to Restore Participation and Self-Support to Free Enterprise' (1997), 'Structural Slumps: The Modern Equilibrium Theory of Unemployment, Interest and Assets' (1994) y 'Microeconomic Foundations of Employment and Inflation Theory' (1970).



*Extraído de*: http://www.zonaeconomica.com/biografia/edmundphelps

## Ramsey Frank

Nacimiento: 22 de febrero de 1903, Cambridge.
Fallecimiento: 19 de junio 1930, Londres.

Si Frank Ramsey no ha pasado a la historia como alguien especialmente recordado fuera del ámbito económico, se lo debemos en parte a su prematura muerte a la edad de 27 años. A pesar de lo cual dejo en sus escritos plasmadas varias ideas ingeniosas que serian desarrolladas con posterioridad por varios conocidos economistas. Con formación matemática, no obstante se ocupo de temas económicos y sobre todo filosóficos, que eran su verdadera pasión.

Estableció una modelización con carácter general para las decisiones bajo incertidumbre en términos probabilísticas (que supuso una encendida crítica a su amigo Keynes) y ciertos axiomas para el desarrollo de la teoría de la utilidad esperada. Ramsey (1928) modeliza la decisión de consumo y ahorro de un agente competitivo que recibe una renta exógena y toma el tipo de interés como dado. Es el análisis de las decisiones de un agente individual.
Mucho tiempo después Solow (1956) y Swan (1956) ponen las bases de la teoría neoclásica del crecimiento. Pero en sus economías la tasa de ahorro se asume constante. Cass (1965) y Koopmans (1965) utilizan la modelización de Ramsey para endogeneizar la tasa de ahorro en el modelo de Solow-Swan. El resultado es el llamado modelo de Ramsey, también conocido como modelo de Cass-Koopmans, y que constituye la base de la teoría del crecimiento óptimo moderna al establecer los factores que inciden en la tasa de crecimiento económico.

Otras aportaciones de interés a cargo de Ramsey fueron su teoría de l a imposición óptima y el criterio de Ramsey para la determinación de precios ante situaciones de producción conjunta.

El mayor de cuatro hermaños, Ramsey fue hijo del matrimonio formado por Agnes Mary Wilson y Arthur Stanley Ramsey, presidente y profesor d e matemáticas del Magdalene College. Sus primeros estudios los llevo a cabo en el Winchester College, que completo con el estudio de matemáticas en el Trinity College de Cambridge. En 1924 es elegido Fellow del King's College, y poco tiempo después *lecturer in mathematics* y *Director of Studies in Mathematics* de dicho centro educativo.

Ramsey falleció el 19 de junio de 1930 en un hospital de Londres, en el transcurso de una operación quirúrgica a la que fue sometido por un ataque de ictericia. Estaba casado, y tenia dos hijos.

### *OBRAS*

*The Foundations of Mathematics: and other logical essays, 1931.*

### *Artículos*

"Mr. Keynes and Probability", 1922, *Cambridge Magazine*

"The Douglas Proposals", 1922, *Cambridge Magazine*

"Review of W.E. Johnson's *Logic, Part I*", 1922, *New Statesman*

"Critical Notice of L.Wittgenstein's *Tractatus*", 1923, *Mind*

"Review of Ogden and Richards' *Meaning of Meaning*", 1924, *Mind*

"The New Principia" 1925, *Nature*

"Universals", 1925, *Mind*

"The Foundations of Mathematics", 1925, *Proc. of London Mathem. Soc.*

"Mathematical Logic", 1926, *Encyclopaedia Britannica*

"Universals and the Method of Analysis" , 1926, *Aristotelian Society*

"Mathematical Logic", 1926, *Mathematical Gazette*

"Truth and Probability", 1926.

"A Contribution to the Theory of Taxation", 1927, *EJ*

"Facts and Propositions", 1927, *Aristotelian Society*

"A Mathematical Theory of Saving" , 1928, *EJ*.

"Further Considerations", 1928.

"On a Problem of Formal Logic" , 1928, *Proc. of London Mathem. Soc.*

Universals of law an of fact, 1928

Knowledge, 1929

Theories, 1929

General propositions and causality, 1929

"Foundations of Mathematics" , *Encyclopedia Británica*

Información recopilada y organizada por Pablo Miro Rocasolano, Economista, Universidad Autónoma de Madrid Octubre de 2003. La elaboración de esta biografía ha contado con la inestimable colaboración de: Jorge Duran Laguna

*Extraído de:* http://www.eumed.net/cursecon/economistas/Ramsey.htm

## Rebelo Sergio

Sergio Rebelo nació en Viseu, Portugal, el 29 octubre, 1959. Sus áreas mayores de investigación son Macroeconomía y la Finanzas Internacional. Él está actualmente el Banco de Tokai el Profesor Distinguido de Finanzas Internacional en la Escuela de Kellogg de Dirección, la Universidad Del noroeste. Él recibió un "Licenciatura" en la Economía de la Universidad católica portuguesa, Amos en los Funcionamientos Investigan de Instituto Técnico Superior, y un Ph.D. en la Economía de la Universidad de Rochester en el EE.UU.

Él dejó Portugal para los Estados Unidos porque el ambiente de la investigación y el apoyo está mucho mejor en los Estados Unidos. Sus consejeros en Portugal eran António Pinto Barbosa y el Aníbal Cavaco Silva (hoy día el Presidente de República portuguesa). Sin su estímulo Rebelo habrían ido nunca al EE.UU. por un Ph.D. Él recibió el apoyo financiero de la Universidad de Rochester, el JNICT (la Junta Nacional de Investigación Científica e Tecnológica), la Fundación de Fullbright, y la Fundación de Sloan.
Rebelo se siente inmensamente afortunado porque él pudo empezar investigue como un primer año Ph.D. el estudiante con su consejero, Robert G. King. Ellos terminaron escribiendo muchos papeles juntos. Había terminado esta colaboración que Profesor Rebelo aprendió a investigar.

Su primer trabajo estaba en la Universidad Del noroeste. Después de dos años a Del noroeste él decidió devolver a Portugal, a la Universidad católica portuguesa y el Banco de Portugal. Dos años Rebelo más tarde recibió el Compañerismo de Olin en el Escritorio Nacional de Investigación Económica (NBER) que le permitió pasarse un año lleno investigue al NBER en Boston.

Mientras él estaba en Boston, la Universidad de Rochester le ofreció una posición del tenured. A estas alturas él se descorazonó con las perspectivas por poder continuar una carrera de la investigación jornada completa en Portugal, para que él aceptara. Después, la Universidad de Del noroeste lo ofreció los Tokai presiden y él aceptó. Moviendo a una universidad diferente siempre se motivó por las condiciones ofrecidas (la carga instrucción, el apoyo de la investigación, el acceso a Ph.D. los estudiantes, y sueldo).

Sérgio Rebelo ha recibido el apoyo de la Fundación de la Ciencia Nacional, otras fundaciones, y el Banco Mundial. Él normalmente trabaja estrechamente con un o dos Ph.D. el estudiante.

Su sueño científico es ayudar descubra las respuestas a las preguntas importantes como lo que maneja el crecimiento económico, qué causas los ciclos comerciales, y qué causas las crisis financieras. Éstos son fenómenos que afectan las vidas de millones de las personas. Su trabajo actual estudia desvalorizaciones del tipo de cambio grandes y episodios de especulación de dinero.

Él ha trabajado en tres áreas diferentes. Él estudió el efecto de política económica en la proporción de crecimiento económico, trabajó en los modelos del ciclo comerciales y, más recientemente, ha trabajado en las crisis del dinero.

Sérgio Rebelo recibió el Alfred P. Sloan el Compañerismo de la Disertación Doctoral y el Compañerismo de Ohlin. Él es un compañero de las dos redes de la investigación más importantes en la Economía, el Escritorio Nacional de Investigación Económica, en el EE.UU. y el Centro para la Investigación de la Política Económica en Europa. Él también ha sido un editor asociado para los periódicos de economía mayores, incluso la Revisión Económica americana, la Revisión Económica europea, y el Periódico de Economía Monetaria.

Profesor Rebelo ha servido como un consultor al Banco Mundial, el Fondo Monetario Internacional, la Tabla de Gobernadores del Sistema de la Reserva Federal, el Banco Central europeo, el McKinsey el Instituto Global, y otras organizaciones.

Él se ha ofrecido las posiciones académicas y non-académicas en Portugal. Pero le gustaría continuar investigue y las condiciones ofrecieron por las instituciones portuguesas palidezca comparado con aquéllos ofrecidos en los Estados Unidos. Durante muchos años él esperó por una oferta que le permitiría devolver a Portugal y continuar una carrera de la investigación jornada completa. Actualmente él estaría contento si había un arreglo institucional que le permitiría gastar algún tiempo trabajando en Portugal.



Extraído de: *http://www.cienciahoje.pt/3357*

## Lucas Robert

El economista estadounidense Robert Lucas conocido por ser líder de la escuela de llamada “Nueva Economía Clásica” y por otros más aportes, nació 5 de septiembre, 1937 en Yakima, Washington. Sus padres se llaman Robert Emerson Lucas y Jane Templeton Lucas; Robert es el hijo mayor, ya que tienen una hermana y dos hermaños menores.

Robert estuvo en las escuelas públicas de Seattle y se graduó del Roosevelt High School en 1955. Tenía habilidad en las ciencias y las matemáticas; y a sus 17 años está listo para irse de su casa pero antes necesitaba una beca, que se la dio la Universidad de Chicago.

Comenzó en la universidad con cursos de matemáticas hasta que se aburrió; y más adelante encontró un gusto por la historia, le interesaban todos los cursos que llevaba ya que todo era nuevo para él, y finalmente se graduó de Historia en 1959. Después tomo algunos cursos de la historia de la economía en la Universidad de Berkeley, y como le gustaron decidió volver a Chicago a estudiar la carrera de economía. Y obtuvo y Ph.D. en Economía en 1964.

Al terminar su tesis Robert comenzó a dedicarse a investigar, ser parte de diferentes proyectos de economía; además trabajo como profesor en la Universidad Carnegie Mellon hasta 1975, porque después fue a dar clases a la Universidad de Chicago.

Es importante decir que a pesar que Robert llevaba una vida muy dedicada al estudio y sus proyectos; debemos de saber que se casó en 1959 con Rita Cohen, también graduada de la Universidad de Chicago; y en 1960 tuvieron su primer hijo Stephen, y en 1966 su segundo hijo Joseph Robert y su esposa se separaron en 1982 y más adelante se divorciaron.

Robert Lucas es uno de los economistas más influyentes, como ya había mencionado es el líder de “Nueva Economía Clásica” la versión moderna de la vieja escuela de Chicago. Su introducción al concepto de las expectativas racionales, en los años 70´s ayudo a dejar atrás los neokeynesiaños y al entronamiento de una macroeconomía basada en los principios neoclásicos, dándole paso a una nueva era de la macroeconomía. Además contribuyó a otras teorías de la economía. Además desarrollo el concepto de la Crítica Lucas sobre política económica. También fue parte del desarrollo del modelo Islas-Lucas que planteaba que las personas pueden ser engañadas por medio de la política monetaria.

Robert ganó el Premio Nobel de Economía en 1995. Y desde 1982 vive con la colega Nancy Stokey en el norte de Chicago.

***Información recopilada por Susana Xu Suyen, ULACIT, 2006**
*Extraído de: http://www.auladeeconomia.com/biografias-lucas.htm*

## Romer Paul

Este influyente profesor de la Universidad de Stanford∗ afirma que un cambio histórico respecto al concepto de crecimiento se ha producido en economía, al pasar de la preocupación por políticas de estabilización (o anticíclicas) características de una sociedad que fabrica mercancías u objetos físicos a otra basada en el conocimiento.

Para él los activos intangibles han pasado ha constituir la base de la riqueza. El crecimiento sostenible se asienta cada vez más en la innovación y la existencia de un mercado competitivo. Cita como ejemplo Rusia como expresión clásica del modelo antiguo de crecimiento al decir que poseía un ejército de científicos de primer orden pero en un marco de mercado débil. Podríamos agregar por nuestra parte que en el ejemplo citado existe además una estructura estatal de tipo autocrático y una cultura sin tradición competitiva.

El autor afirma que hasta hace bien poco poseer un ordenador, una conexión y un cierto control sobre la rentabilidad eran suficientes para el modelo de fabrica-mercancía, pero cada vez aparece la necesidad de los incentivos. Es decir una economía que permita crear empresas –Star up- con capacidad de utilizar el I+D. “El nuevo modelo mental sugiere que creemos valor no de cambio bajo el modelo de la fábrica. Es el descubrimiento de las buenas recetas, buenas instrucciones, buenos diseños para dotar a la materia prima de una configuración más valiosa”(1). Lo esencial del cambio tecnológico es la manera de hacer mejores las cosas. Para Romer la Idea concepto que resume el conocimiento- tiene la virtud que puede ser utilizada por millones de personas al mismo tiempo. El cita un ejemplo: las tiendas de café en EEUU sirven tazas de diferentes tamaños pero todas poseen el mismo tamaño de tapa. Millones de pequeños descubrimientos combinados con algunos descubrimientos grandes como el motor eléctrico o los antibióticos han producido un cambio en el nivel de vida de la gente.

La teoría del crecimiento distingue entre las Ideas y las Cosas. La diferencia estriba en que solo una persona puede utilizar una “cantidad dada de algo” por ejemplo un coche o un bolígrafo, pero las ideas, la civilización del conocimiento permite su utilización por muchas más personas al mismo tiempo.

El núcleo de su tesis -las habilidades adquiridas-, el capital humano aumentan la productividad, pero la premisa para su difusión se asienta en unas sólidas instituciones de ciencia e instituciones de mercado. El autor nos dice que una institución significa poseer convenciones y reglas sobre como se hacen las cosas. Asociado a ello están los derechos de propiedad y la noción de propiedad privada (2). Bien es cierto que el autor plantea una distinción respecto a los derechos entre ciencia y empresa. Para la empresa estos derechos deben incluir los derechos propietarios, en la ciencia su recompensa es la difusión de las ideas.

Para Romer esta revolución se explica en el esquema de que las Ideas suponen No Rivalidad y garantizan Rendimientos crecientes

∗ Paul Romer es profesor de la economía en la escuela graduada de Stanford. Sus teorías se han analizado extensamente en la prensa de negocio y el compartimiento de Time lo nombró una de 25 personas más influyentes de América. Su "nueva teoría del crecimiento" ha cambiado el negocio y el gobierno que pensaban en la dinámica de la abundancia y creación-que traían las aplicaciones, el descubrimiento científico, el crecimiento tecnológico del cambio, de la innovación y de la productividad de nuevo al centro del análisis macroeconómico.

Y= F(K,AL) A: stock de ideas  Solo K y L garantizan rendimientos constantes a escala. Su concepto es que el conocimiento esta incorporado al ser humano y  no es posible reducir el consumo de forma que otros individuos no puedan disponer de el.

Y= AL& (K1 + K2 +…+K3)1-&, donde K significan: computadores, teléfonos, acumulación de cambios, incorporación de procesos.

El gran acierto de Romer en destacar que el conocimiento ha desplazado a la fabricación de objetos físicos en el crecimiento.

“La parte más profunda de la actividad económica, por mas paradójico que parezca, está en el descubrimiento de esas nuevas formulas. Y ese “imput” es puramente humano, fruto de nuestra materia gris. En Silicon Valley hay dos conceptos que expresan bien este mecanismo. Aquí se habla de software y de netware-hardware Este último término muy usado por aquí, todo el mundo sabe qué es. El software son las fórmulas después de codificadas y aplicadas. El wetware representa el tal “imput” original humano. El proceso de conocimiento en general es la transición del wetware al software”(3). Queda un aspecto que debemos considerar que es el papel de la creación de empresas –star up- que en cada país varia y es crucial.

*Extraído_de*:http://www.destinationkm.com/articles/default.asp%3FArticleID%3D743&prev=/search%3Fq%3Dpaul%2Bromer%26start%3D20%26hl%3Des%26lr%3D%26sa%3DN

## Schumpeter Joseph Alois

(Trest, Moravia, 1883-Salisbury, Connecticut, 1950). Economista y sociólogo austriaco. Inició su formación superior en Viena, en donde fue discípulo de los principales representantes de la escuela austríaca, F. von Wieser y Von Böhm-Bawerk. En 1907 continuó sus estudios en Gran Bretaña. Ministro de Hacienda austriaco (1919), se dedicó principalmente a la enseñanza, siendo profesor en Bonn y Harvard. En 1932 se instaló definitivamente en EE UU.

Su obra es una de las más vastas que se han producido en el siglo XX, con gran influencia en el pensamiento económico y las ciencias sociales en su conjunto. Destacó la influencia de los empresarios, la creación del crédito y la técnica en el desarrollo económico, además de polemizar con el socialismo.

Uno de los conceptos introducidos por Schumpeter que más influencia ha tenido es el de innovación. Según él, existe un estado de no crecimiento, el «circuito» económico, y un estado de crecimiento, la «evolución». El paso del «circuito» a la «evolución» se efectúa por medio de las innovaciones, que constituyen el motor del crecimiento.

Es autor, entre otros trabajos, de *Teoría de la evolución económica* (1912), *Ciclos económicos* (1939), *Capitalismo, socialismo y democracia* (1942), *Historia del análisis económico* (1954) y el ensayo *Diez grandes economistas: de Marx a Keynes* (1951).



*Extraído de: http://www.biografiasyvidas.com/biografia/s/schumpeter.htm*

## Solow Robert

Robert Merton Solow, nació en Brooklyn Nueva York el 23 de agosto de 1924, era el mayor de tres niños y sus padres fueron inmigrantes por lo que sus hermanas, su primo y él, fueron la primera generación de su familia en estudiar en una universidad. Según Robert Merton, recibió una buena educación ya que asistió a los colegios públicos de Nueva York, en donde aprendió a tomar sus ideas más enserio, después de esto ganó una beca para Harvard, donde ingresó en 1924.

Sus primeros estudios fueron en sociología, antropología y economía elemental, a los 18 años dejó sus estudios y se unió al ejército de los Estados Unidos, donde sirvió en el Norte de África y Cicilia.

Sirvió como asesor del presidente Kennedy. Además su aportación más conocida es un modelo del crecimiento considerando la respuesta ortodoxa al modelo keynesiano de Harrod-Domar que fue publicado en un artículo de 1956.

Sus estudios en economía, sobre la inversión en capital fijo y la influencia de la tecnología en los aumentos de la productividad, posicionan los orígenes de la llamada “contabilidad del crecimiento”, en la que se separa la contribución al crecimiento económico de la cantidad de trabajo y capital. También realizó un trabajado en el análisis económico de los recursos no renovables.

Para Él la ciencia económica, es una idea de un modelo universal y válido para todo el mundo. El alcance y el ámbito de los modelos económicos, se ha extendido demasiado, dejando en el olvido las contingencias particulares de cada sociedad. Para Él un economista consciente es el que para diferentes circunstancias distingue diferentes supuestos y modelos.

El deber de la historia económica, está en observar con sensibilidad, los esquemas de valores, hábitos y las estructuras de las distintas ciudades en sus distintas épocas, y con ello poder decir si la teoría es aplicable en otros tiempos y para otros espacios, en lo cual esta basado el marco de Solow.

Algunas de las obras de Solow son las siguientes:

A Contribution to the Theory of Growth en Quarterly Journal of Economics, febrero 1956.

Technical Change and the Aggregate Production Function en Review of Economic and Statistics, agosto 1957.

Growth Theory: An Exposition, Oxford University Press, 1969.

Price Expectations and the Behaviour of the Price Level (1970)

Teoría del Crecimiento (1970) Versión española en Fondo de Cultura Económica, México, 1976.

***Información recopilada por Josué Meza, ULACIT, 2006***
*Extraído de: http://www.auladeeconomia.com/biografias-solow.htm*

## Swan Trevor.W

(1918 - 1989) era economista australiano que se graduó de la Universidad de Sydney en 1939, después de haber estudiado la jornada incompleta mientras trabajando en el Banco Rural.

Él era empleado en el servicio del gobierno hasta las 1950, y contribuyó al Papel Blanco en Empleo Lleno que puso el armazón para la política macroeconómica australiana en las décadas postguerras.

Él es el más conocido para su trabajo sobre el modelo neoclásico del desarrollo económico, publicado simultáneamente con el de Roberto Solow, para su trabajo sobre la integración del equilibrio interno y externo, representado por el diagrama del cisne y para iniciar el trabajo en el modelado macroeconómico, que precedió el de Lorenzo Klein, pero seguido siendo inédito hasta 1989. Lo miran extensamente como el teórico económico más grande que Australia ha producido, y como uno de los economistas más finos para no recibir un Premio Nobel.

*Extraído de: http://en.wikipedia.org/wiki/Trevor_Swa*

## Uzawa Hirofumi

El economista japonés Hirofumi Uzawa (1928 - ) ha sido declarado por el emperador de su país "tesoro nacional viviente". Nacido en la Prefectura de Tottori, se graduó en Economía y Matemáticas por la Universidad de Tokio. Sus escritos suelen estar muy formalizados en la tradición walrasiana. Su aportación más conocida es el modelo de crecimiento de dos sectores que propuso en 1961 y que fue el inicio de una intensa investigación por los especialistas en crecimiento económico durante la década de los sesenta.

Actualmente es profesor de Economía en la Universidad CHUO, Profesor del Instituto de Estudios Avanzados de la Universidad de las Naciones Unidas y Profesor Emérito de la Universidad de Tokio.

*"En 1891 el problema eran los abusos del capitalismo y las ilusiones del socialismo; cien años después el problema es el de los abusos del socialismo y las ilusiones del capitalismo"*

Hirofumi Uzawa, Social and ethical aspects of economics -a colloquium in the Vatican-, Pontificial council for justice and peace, Vatican city, 1991.

**Obras**

"On Preferences and Axioms of Choice", 1956, *Annals of Statistical Mathematics*.

"On the Rational Selection of Decision Functions", 1957, *Econometrica*.

"On the Menger-Wieser Theory of Imputation", 1958, *ZfN*.

*Studies in Linear and Non-Linear Programming* con K.J.Arrow y Leonid Hurwicz, 1958.

"Prices of Factors of Production in International Trade", 1959, *Econometrica*.

"Locally Most Powerful Rank Tests for Two-Sample Problems", 1960, *Annals of Mathematical Statistics*.

"Preference and Rational Choice in the Theory of Consumption", 1960, en Arrow, Karlin y Suppes, eds, *Mathematical Models in Social Science*.

"Walras' Tatonnement in the Theory of Exchange", 1960, *RES*.

"Market Mechanisms and Mathematical Programming", 1960, *Econometrica*.

"Stability and Non-Negativity in a Walrasian Adjustment Process" con H. Nikaido, 1960.

"Constraint Qualifications in Non-Linear Programming", con K.J. Arrow y L. Hurwicz, 1961, *Naval Research Logistics Quarterly*

"On a Two-Sector Model of Economic Growth, I", 1961, *RES*.

"Natural Inventions and the Stability of Growth Equilibrium", 1961, *RES*.

"The Stability of Dynamic Processes", 1961, *Econometrica*

"On the Stability of Edgeworth's Barter Process", 1962, *IER*.

"Walras's Existence Theorem and Brouwer's Fixed Point Theorem", 1962, *Economic Studies Quarterly*.

"Aggregative Convexity and the Existence of Competitive Equilibrium", 1962, *Economic Studies Quarterly*.

"Production Functions with Constant Elasticities of Substitution", 1962, *RES*.

"On a Two-Sector Model of Economic Growth, II", 1963, *RES*.

"On Separability in Demand Analysis", con S.M. Goldman, 1964, *Econometrica*.

"On Professor Solow's Model of Technical Progress", 1964, *Economic Studies Quarterly*.

"Optimal Growth in a Two-Sector Model of Capital Accumulation", 1964, *RES*.

"Duality Principles in the Theory of Cost and Production", 1964, *IER*.

"On an Akerman-Wicksellian Model of Capital Accumulation", with T. Yasui, 1964 *Economic Studies Quarterly*.

"Optimum Technical Change in an Aggregative Model of Economic Growth", 1965, *IER*.

"Patterns of Trade and Investment in a Dynamic Model of International Trade", with H. Oniki, 1965, *RES*.

"On a Neoclassical Model of Economic Growth", 1966, *Economic Studies Quarterly*.

"Market Allocation and Optimum Growth", *Australian EP*.

"The Penrose Effect and Economic Growth", 1968, *Economic Studies Quarterly*.

"Time Preference, the Consumption Function and Optimum Asset Holdings", 1968, en Wolfe, editor, *Value, Capital and Growth*.

"Time Preference and the Penrose Effect in a Two-Class Model of Economic Growth", 1969, *JPE*.

"Optimum Fiscal Policy in an Aggregative Model of Economic Growth", 1969, in Adelman and Thorbecke, editors, *Theory and Design of Economic Development*.

"On the Integrability of Demand Functions", con L. Hurwicz, 1971, in *Preferences, Utility and Demand*.

"Diffusion of Inflationary Processes in a Dynamic Model of International Trade", 1971, *Economic Studies Quarterly*.

"Towards a Keynesian Model of Monetary Growth", 1973, en Mirrlees y Stern, eds, *Models of Economic Growth*.

"Optimum Investment in Social Overhead Capital", 1974, en *Economic Analysis of Environmental Problems*.

"La theorie economique du capital collectif social", 1974, *Cahier d'econometrie et economique*.

"On the Dynamic Stability of Economic Growth", 1974, en *Trade, Stability and Growth*.

"Disequilibrium Analysis and Keynes's *General Theory*", 1976.

*Preference, Production and Capital: Selected papers of Hirofumi Uzawa.*, 1988.

*Optimality, Equilibrium and Growth: Selected papers of Hirofumi Uzawa*, 1988.

An Endogenous Rate of Time Preference, the Penrose effect, and dynamic optimality of environmental quality, 1996, *Proceedings of the National Academy of Sciences*.

*Extraído de: http://www.eumed.net/cursecon/economistas/uzawa.htm*

# Bibliografía

- Argandoño A, Gamez C, Mochón F (1997), "Macroeconomía Avanzada II", Mc Graw Hill.
- Arrow, K. (1962). «The Economic Implications of Learning by Doing», R.E.S., número 29(2), páginas 155-173.
- Barro, Robert, J. y J.W. Lee (1994), "Sources of economic growth", Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy, 40, 1-46.
- Barro, Robert, J. y Sala-i-Martin, X. (1995): Economic Growth. New York, McGraw-Hill.
- Barro, Robert, J. (1991), "Economic growth in a cross section of countries", Quarterly Journal of Economics, 106, 407-443.
- Baumol, W (1986):«Productivity growth, convergence and welfare: What the long-run data-show». American Economic Review, vol.76 no.5, pp. 1072-1085.
- Bernard, A.B. y C.I. Jones (1996), "Productivity across industries and countries: time series theory and evidence", Review of Economics and Statistics, February 1996.
- Blanchard, Oliver.J. Fischer, S. (1989) "Lectures on Macroeconomics" The Mit Press.
- Cass, David (1965) "Optimum growth in an aggregative model of capital accumulation," Review of Economic Studies, 32, 233-240.
- De la Fuente, A. (1995), "Inversión, catch-up tecnológico y convergencia real", Papeles de Economía Española, 63, 18-34.
- De la Fuente, A. (1996), "Economía regional desde una perspectiva neoclásica. De convergencia y otras historias", Revista de Economía Aplicada, Vol. IV, 10, 5-63.
- De la Fuente, A. y J.M. da Rocha (1996), "Capital humano y crecimiento: un panorama de la evidencia empírica y algunos resultados para la OCDE", Moneda y Crédito, 203.
- DeLong, J, Brasford and Lawrence H.Summers (1991). "Equipment Investment and Economic Growth", Quarterly Journal of Economics, 106, 2(May), 445-502.
- Domar, Evsey D. (1946) Capital Expansion, Rate of Growth, and Employment. Econometrica, April.
- Ferreira, Jaime P. (1995), "Modelos Macroeconómicos de Crecimiento", Universidad Autónoma Metropolitana, México.

- Galindo, Miguel Ángel y Malgesini, Graciela (1994), "Crecimiento económico. Principales teorías desde Keynes, Ed. Mc-Graw Hill.
- Gerald Destinobles, A.: (2007) Introducción a los modelos de crecimiento económico exógeno y endógeno. Edición electrónica gratuita. Texto completo en www.eumed.net/libros/2007a/243/
- Grupo de Economía Dinámica. (2003)"Una Síntesis de las aproximaciones Neoclásica y evolutiva al Crecimiento Endógeno", Nº1, Institutos de Investigaciones Económicas y Sociales <<Francisco de Victoria>>.
- Harrod, Roy. (Marzo 1939)"An Essay in Dynamic Theory". Publicado en The Economic Journal.
- Jones, Charles.I (2000) "Introducción al crecimiento económico". Editorial Pearson Educación, México, Versión en español. Primera edición.
- Jones, L. A., R. E. Manuelli y P. Rossi (1997), "On the optimal taxation of capital income", Journal of Economic Theory, 73: 93 -117.
- Jones, L.E. y Manuelli, R.E. (1994):«Teoría del crecimiento endógeno: una introducción» en Cuadernos económicos de ICE, no. 58, 1994/3, pp. 3 -22.
- Jorge Thompson Araújo (2003) "El sector gubernamental en los modelos Kaldor-Pasinetti de crecimiento y distribución de la renta" vol. 15, N. 2, Págs.211-228, (Invierno 1992-1993).
- Kaldor, Nicholas.(1976) "Capitalismo y desarrollo industrial: algunas lecciones de la experiencia británica", C. F. Díaz, S. Teitel y V. Tockman, comps., Política económica en centro y periferia, México, Fondo de Cultura Económica.
- Kaldor, Nicholas.(1989) "The Case for Regional Policies", 1970, F. Targetti y A. P. Thirlwall, comps., The Essential Kaldor, London, Duckworth.
- Kalecki, M. (1956): Teoría de la dinámica económica, Fondo de Cultura Económica.
- Koopmans, Tjalling C. (1965) "On the concept of optimal growth," The Econometric Approach to Development Planning. Rand McNally.

- Kuznest, Simon (1973). "Modern Economic Growth: Finding and Reflections,"" American Economic Review, 63, 3(June), 247-258.
- Lewis Arthur. (Madrid 1963) El desarrollo económico con oferta ilimitada de factores. En "La Economía del Subdesarrollo", A. N. Agarwala y S. P. Singh, pp.333-374.
- Lucas, Robert.E. (1990), "Why doesn´t capital flow from rich to poor nations?", American Economic Review, 80, 92-96.
- Lucas, Robert. (1988) ``On the Mechanics of Development Planning. ‘‘Journal of Monetary Economics 22/ 1, pp. 3-42.
- Nelson, R.P. y Phelps, E.S. (1966):«Investment in humans, technological diffusion, and economic growth». American Economic Review, vol.56 no.2, Mayo, pp. 69-75.
- Phelps, Edmund.S (1962) The New of Investment: Neoclassical Analysis. "Quarterly Journal of Economics", 76,4 (Noviembre), (548-567).
- Ramsey, Frank (diciembre, 1928) "A Mathematical Theory of Saving", Economic Journal 38, pp. 543-559.
- Rebelo, Sergio (1991): «Long-Run Policy Analysis and Long-Run Growth». Journal of Political Economy vol.99 no.3, pp. 500-521.
- Romer, David. (2002) "Macroeconomía avanzada". Mc Graw Hill. Segunda edición.
- Romer, Paul M. (1986). "Increasing Returns and Long-Run Growth," Journal of Political Economy, 94, 5(October), 1002-1037.
- Romer, Paul M. (1991) "El cambio tecnológico endógeno" en el Trimestre Económico 58(231): 441-480.
- Sala -I- Martin Xavier (2000) "Apuntes de Crecimiento Económico". Antoni Bosch, editor, segunda edición.
- Sala-I-Martin Xavier (1994) "Apuntes de Crecimiento Económico", Antoni Bosch, editorial, pp. 70-76.
- Schultz, T. (1960), "Capital formation by education", Journal of Political Economy, 69, 571-583.

- Schumpeter, Joseph Alois. (1957) La teoría del desenvolvimiento económico: Una investigación sobre ganancias, capital, crédito, interés y ciclo económico. Fondo de cultura económica Medellín.
- Sen, Amartya. (1999) "Desarrollo y Libertad". Editorial Planeta.
- Sen, Amartya K. (1979), "Economía del crecimiento", Fondo de Cultura Económica, 525 pp. (El Trimestre Económico. Lecturas, 28), México.
- Solow, Robert M. (1596) "A contribution to the theory of economic growth," Quarterly Journal of Economics, 70, pp.: 65-94.
- Swan, Trevor.W (1956) "Economic Growth and Capital Accumulation", The Economic Record, pp. 334 - 361.
- Thirlwall, Anthony.P (2003) "La naturaleza del crecimiento económico, un marco alternativo para comprender el desempeño de las naciones". Fondo de cultura económica, México.
- Uzawa, Hirofumi. (1965) `` Optimal Technical Change in an Aggregative Model of Economic Growth." International Economic Review 6, pp. 18-31.
- Young, A. (1928) "Rendimiento crecientes y progreso económico", K. Arrow y T. Scitovsky, comps. La economía del bienestar, vol. I, México, Fondo de Cultura Económica.